Partie 1: analyse et algèbre.

Problème.

Dans tout le problème, p, q et f désignent trois fonctions définies et continues sur $[0,1]$.
De plus, la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et les fonctions p et q vérifient :

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad p(x) > 0 \qquad q(x) \geq 0.$$

On note H l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles s'annulant en 0 et en 1:

$$H = \{u \in \mathcal{C}^1[0,1]\ ,\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

Pour tout couple (u,v) éléments de H, on pose

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 \Big(u(t)v(t) + u'(t)v'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

$$\varphi(u,v) = \int_0^1 \Big(q(t)u(t)v(t) + p(t)u'(t)v'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

$$L(v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

I. Études de produits scalaires.

1. Enoncer et redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire quelconque. Etudier le cas d'égalité.

2. Justifier l'existence de quatre réels positifs p_0, q_0 p_1 et q_1 tels que

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1.$$

3. (a) Montrer que H est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) Montrer que L est une forme linéaire sur H.
   (c) Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur H.
   On note, pour le reste du problème, $||.||$ la norme associée, i.e. $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
   (d) Montrer que φ est un produit scalaire sur H.

4. (a) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la forme suivante

$$\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (f,g) \to \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

   est un produit scalaire sur E.
   (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en déduire l'existence d'un réel γ positif tel que

$$\forall\, v \in H, \qquad |L(v)| \leq \gamma ||v||.$$

5. Montrer de même qu'il existe un réel δ strictement positif tel que

$$\forall\, (u,v) \in H^2, \qquad |\varphi(u,v)| \leq \delta\, ||u||\, ||v||.$$

   On explicitera le réel δ en fonction de p_1 et de q_1.

6. (a) Montrer que

$$\forall\, v \in H, \qquad \forall\, x \in [0,1], \qquad v^2(x) \leq x \int_0^1 (v'(t))^2 \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que

$$\forall\, v \in H, \qquad p_0 ||v||^2 \leq \frac{3}{2}\varphi(v,v).$$

7. Soit $v \in H$. Donner un encadrement de $||v||$ à l'aide de $\sqrt{\varphi(v,v)}$.

8. On suppose qu'il existe une fonction u de H vérifiant

$$\forall\, v \in H, \qquad \varphi(u,v) = L(v).$$

Montrer qu'une telle fonction u, si elle existe, est unique.

II. Application à l'étude d'une équation différentielle.

On s'intéresse ici aux fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ vérifiant l'équation dite *de Sturm-Liouville* :

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad -p(x)u''(x) - p'(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \qquad (1)$$

Aucune connaissance préalable sur les équations différentielles n'est ici requise.
On admet dans toute la suite du problème que les fonctions p, q et f sont choisies de telle sorte que l'équation différentielle (1) admette une solution u vérifiant

$$u(0) = u(1) = 0.$$

On remarquera qu'une telle fonction u est un élément de H.

1. On se place, dans cette question seulement, dans le cas particulier :

$$p : x \mapsto e^{-x} \qquad q : x \mapsto 0 \qquad \text{et} \qquad f : x \mapsto 1.$$

(a) Soit $u \in H$. Montrer que la fonction u est solution de l'équation (1) si et seulement si il existe un réel λ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad u'(x) = (\lambda - x)\, e^{x}.$$

(b) Déterminer l'unique fonction u de H solution de l'équation différentielle (1).

2. On revient au cas général. Soit $u \in H$ une fonction solution de (1).
Montrer que

$$\forall\, v \in H, \qquad \varphi(u,v) = L(v).$$

3. En utilisant les résultats de la Partie I, montrer que l'équation différentielle (1) admet une unique solution dans H.

4. Pour tout élément $v \in H$, on pose

$$J(v) = \frac{1}{2}\varphi(v,v) - L(v).$$

On désigne par u l'unique solution de l'équation différentielle (1) dans H.

(a) Pour tout $w \in H$, exprimer $J(u+w)$ en fonction de $J(u)$ et de $\varphi(w,w)$.

(b) Montrer que

$$\forall\, v \in H, \qquad J(u) \leq J(v).$$

Préciser pour quelle(s) valeur(s) de v l'égalité est réalisée.

(c) Réciproquement, soit $u_0 \in H$ tel que

$$\forall\, v \in H, \qquad J(u_0) \leq J(v).$$

En calculant $J(u_0 + \lambda w)$ pour tout $w \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall\, w \in H, \qquad \varphi(u_0, w) = L(w).$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice.

Le but de ce problème est d'étudier le développement en série de Engel des réels de $]0,1]$. On note E l'ensemble des suites croissantes d'entiers supérieurs à 2.

Pour toute suite $q=(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$, on note $S_n(q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{q_0\cdots q_k}$.

I. Préliminaires.

1. Déterminer la limite de $(S_n(q))$ dans les cas suivants :

   (a) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q_n=p$, où $p\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

   (b) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q_n=n+2$.

2. Montrer que pour tout $q\in E$, $(S_n(q))$ converge vers un réel de $]0,1]$.

II. Existence du développement de Engel.

$\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière de x. Dans toute cette partie, on fixe $x\in]0,1]$.
On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad x_0=x,\quad q_n=1+\left\lfloor\frac{1}{x_n}\right\rfloor\qquad x_{n+1}=q_nx_n-1.$$

1. Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
2. Etudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$.
4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$x=S_n(q)+\frac{x_{n+1}}{q_0\cdots q_n}.$$
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n(q)$.
6. Soit $a\geqslant 3$.

   (a) Montrer que l'équation $x^2-ax+1=0$ admet une unique solution dans $]0,1]$. On note cette solution $r(a)$. On ne demande pas de l'expliciter.

   (b) On suppose $a\in\mathbb{N}$. Montrer que si $x=r(a)$, alors $a=1+\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

   (c) Soit $p\in\mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 3. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies comme précédemment en posant $x=r(p)$.
   Montrer que si $x_n=r\left(q_n\right)$ alors $x_{n+1}=r\left(q_n^2-2\right)$.

   (d) Conclure que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$q_0=p\qquad\text{et}\qquad\forall\, n\in\mathbb{N},\quad q_{n+1}=q_n^2-2.$$

Partie 2 : probabilités et statistiques.

Notations:

v.a. signifie variable aléatoire et v.a.i.i.d. variables aléatoires mutuellement indépendantes et identiquement distribuées.

$\mathbb{P}[A|B]$ est la probabilité conditionnelle de l'évémenent A sachant que l'événement B est réalisé.

$\mathbb{E}[X|Y]$ est l'espérance conditionnelle de la v.a. X sachant la v.a. Y.

$\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ représentent respectivement l'espérance et la variance d'une v.a. X, lorsque ces quantités existent.

Exercice 1.

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$, de densité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

et de fonction de répartition:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx.$$

On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ et pour tout $x > 0$,

$$\rho_n(x) = \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq x\right].$$

1°. Déterminer la loi de S_n/n et en déduire que

$$\forall x > 0,\ \rho_n(x) = \mathbb{P}\left[|X_1| \geq x\sqrt{n}\right] = 2\mathbb{P}[X_1 \geq x\sqrt{n}] = 2(1 - \Phi(x\sqrt{n})).$$

2°. Démontrer que,

$$\forall x > 0,\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

3°. En déduire l'inégalité de concentration gaussienne suivante:

$$\forall n \geq 1,\ \forall x > 0,\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{x\sqrt{n}} - \frac{1}{x^3 n^{3/2}}\right) e^{-nx^2/2} \leq \rho_n(x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x\sqrt{n}} e^{-nx^2/2}.$$

4°. Rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev et les redémontrer.

5°. Soit h une fonction positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Après avoir justifié de l'existence de l'espérance, démontrer que pour toute v.a. positive, intégrable et pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{h(t)}.$$

6°. En déduire que

$$\forall x > 0,\ \rho_n(x) \leq 2e^{-tx\sqrt{n}} \mathbb{E}[e^{tX_1}]$$

après avoir justifié l'existence de l'espérance.

7°. Démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbb{E}[e^{tX_1}] = e^{-t^2/2}.$$

8°. En déduire que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x > 0,\ \rho_n(x) \leq 2e^{-nx^2/2}.$$

Exercice 2.

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul. On considère une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n\geq 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On notera $q = 1-p$. L'événement $[X_n = 1]$ représente un succès au n-ième tirage.

1°. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir un premier succès. Démontrer que

$$\forall k \geq 1,\ \mathbb{P}[Y = k] = q^{k-1}p.$$

Déterminer l'expression de l'espérance $\mathbb{E}[Y]$ et de la variance $\mathbb{V}(Y)$ de Y, en fonction de p et q.

2°. On considère deux v.a. indépendantes Y_1 et Y_2 de même loi géométrique de paramètre p. On note $S = Y_1 + Y_2$. Démontrer que

$$\forall n \geq 2,\ \mathbb{P}[S = n] = np^2q^{n-2}.$$

3°. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[Y_1 = k|S = n]$. Interpréter le résultat.

On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ la somme des n premiers tirages et T_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir n succès. On dit que T_n suit une loi de Pascal de paramètres n et p.

4°. Reconnaître la loi suivie par S_n, puis démontrer que pour tout $k \geq n$,

$$[T_n = k] = [S_{n-1} = k-1] \cap [X_n = 1].$$

5°. En déduire que

$$\forall k \geq n,\ \mathbb{P}[T_n = k] = \begin{pmatrix} k-1 \\ n-1 \end{pmatrix} p^n q^{k-n}.$$

6°. On pose $Y_1 = T_1$ et pour tout $i \geq 2$, $Y_i = T_i - T_{i-1}$. Montrer que les $(Y_i)_i$ forment une suite de variables de loi géométrique de paramètre p. Montrer qu'elles sont mutuellement indépendantes et que

$$T_n = Y_1 + ... + Y_n.$$

7°. Déterminer $\mathbb{E}[T_n]$ et $\mathbb{V}(T_n)$.

8°. On note V_n le nombre d'échecs dans la séquence $(X_i)_i$ nécessaires avant d'obtenir n succès. On dit que V_n suit une loi binomiale négative de paramètres n et p. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, V_n et T_n sont liées par la relation suivante:

$$T_n = V_n + n.$$

En déduire que

$$\forall k \geq 0,\ \mathbb{P}[V_n = k] = \begin{pmatrix} k+n-1 \\ k \end{pmatrix} p^n q^k.$$

9°. Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[\frac{n-1}{T_n - 1}\right] = p \text{ et } \mathbb{E}\left[\frac{n}{T_n}\right] > p,$$

après avoir justifié de l'existence de ces espérances.

10°. On suppose p inconnu et on souhaite l'estimer à partir des observations. Démontrer que la suite de v.a. $(n/T_n)_n$ converge en probabilité et préciser sa limite. En déduire un estimateur $\hat{p}$ de p. Est-il biaisé ? Proposer un estimateur $\tilde{p}$ non biaisé.

11°. On suppose n et p inconnus. On considère une suite $(W_i)_i$ de v.a.i.i.d. dont chaque élément W_i suit la même loi que T_n. Déduire de la question 7° des estimateurs $\hat{n}$ et $\hat{p}$ de n et p mettant en jeu la moyenne et la variance empirique de $W_1, ..., W_i$. Déterminer de même des estimateurs $\widetilde{n}$ et $\widetilde{p}$ de n et p à partir d'une suite $(W_i)_i$ de v.a.i.i.d. dont chaque élément suit la même loi que V_n. Quels problèmes peuvent poser ces derniers estimateurs ?