CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

Session 2023

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6

Tous documents et appareils électroniques interdits

Tournez la page S.V.P

Partie 1 : algèbre-analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes mais sont centrées autour d'une même thématique.

On note $V = M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients complexes et $E = \mathbb{C}^n$ identifié à $M_{n,1}(\mathbb{C})$ $(n \geq 2)$. On notera Tr la trace d'une matrice.

Une matrice N est dite *nilpotente* si et seulement s'il existe $q \geq 2$ tel que : $N^q = 0$.

1ère partie

Soit $A \in V, A \neq 0$. On appelle ϕ l'endomorphisme de V défini par : $\forall\ M \in V :\ \phi(M) = AM$.

1.
   a. Montrer que, si λ est valeur propre de ϕ, alors λ est valeur propre de A.
   b. Soit M_0 un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ.
      Montrer que, si $X \in E$ est vecteur propre de M_0 associé à une valeur propre non nulle, il est vecteur propre de A.
   c. Que peut-on dire de A lorsque M_0 n'admet pas 0 comme valeur propre ?

2.
   a. Réciproquement, montrer que, si λ est valeur propre de A, λ est valeur propre de ϕ et qu'il existe des vecteurs propres de ϕ de rang 1.
   b. Montrer que, si $Y \in E$ est vecteur propre de A, il existe une matrice M_0 de rang 1, vecteur propre de ϕ, dont Y est vecteur propre.
   c. À quelle condition I_n est-il vecteur propre de ϕ ?

3. Soit M_0 un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ.
   a. Montrer que, si la famille $(M_0, M_0^2, \dots, M_0^{n^2})$ est libre, alors : $A = \lambda I_n$.
   b. Dans le cas contraire, montrer qu'il existe $p \in \{2, \dots, n^2\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ tel que :
$$M_0^p = \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k M_0^k.$$
   c. **Pour cette question seulement** : Si le sous-espace propre de ϕ associé à la valeur propre λ est de dimension 1 :
      i. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que : $M_0^2 = \alpha M_0$.
      ii. Montrer alors que : $Tr(M_0) = \alpha\ Rg(M_0)$.

4.
   a. Identifier les sous-espaces propres de ϕ.
   b. En déduire que, si A est diagonalisable, ϕ est diagonalisable.

$2^{\text{ème}}$ partie

Soit $A \in V$. On s'intéresse maintenant à l'endomorphisme ψ de V défini par :

$$\forall\, M \in V :\ \psi(M) = AM - MA.$$

5. À quelle condition *nécessaire et suffisante* portant sur A cet endomorphisme est-il nul ?

On suppose dans la suite que ψ n'est pas l'endomorphisme nul.

6.
   a. Donner deux vecteurs propres de ψ linéairement indépendants.
   b. Soit M_1 un vecteur propre de ψ associé à la valeur propre μ.
      Calculer $\psi(M_1^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   c. En déduire que, si $\mu \neq 0$, M_1 est nilpotente.
   d. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k X^k$.
      Démontrer la relation : $\psi[P(M_1)] = \mu\, M_1 P'(M_1)$, où :
      $$\forall\, M \in V : P(M) = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k M^k.$$
   e. Que peut-on en déduire pour $P(A)$?

7. Si M_1 est un vecteur propre de ψ, que peut-on dire de M_1^{-1} ?

8.
   a. Si M_1 et M_2 sont deux vecteurs propres de ψ, associés aux valeurs propres μ_1 et μ_2, où l'on suppose que M_1 est inversible, que peut-on dire de $M_1 M_2$?
   b. En déduire que $M_1 M_2$ est vecteur propre de ψ pour la valeur propre $\boxed{\mu_2}$.

9. Montrer que, si A est nilpotente, ψ admet 0 comme unique valeur propre.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\binom{n}{p}$ le coefficient du binôme : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

On définit la fonction f_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

et on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

1. Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$.
3. Montrer que la série de terme général I_n est convergente.
4. On note $a_1, a_2, \dots, a_p$ les réels tels que : $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{p+x}$.
   (a) Calculer, pour tout p de $[\![1, n]\!]$, a_p en fonction de p et de n.
   (b) Vérifier que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_p = 0$.
   (c) En déduire, sous forme de somme, la valeur de I_n.
5. (a) Établir, pour tout x de $[0, 1]$, l'encadrement suivant :
$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$
   (b) En déduire le résultat suivant :
$$\int_0^1 f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n!\ln(n)}$$
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = nI_{n+1}$.
7. Déduire de ce qui précède la formule suivante :
$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p+1} \binom{n-1}{p} \ln(p+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}$$

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et T le plus petit entier aléatoire k vérifiant $S_k > 1$, et on pose $T = -1$ si un tel indice n'existe pas.
C'est-à-dire que, pour tout ω de Ω :

$$T(\omega) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_k(\omega) > 1\}$$

si cet ensemble est non vide et $T = -1$ si cet ensemble est vide.
On admet que T est bien une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. (a) Déterminer une densité de S_2, puis calculer $\mathbb{P}(S_2 \geqslant 1)$.
   (b) Montrer que la suite $(\mathbb{P}([S_n \geqslant 1]))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ non nul.
   (c) On pose $S'_n = \sum_{k=n+1}^{2n} X_k$.
   En considérant, pour tout entier n non nul les événements $(S_{2n} \geqslant 1)$, $(S_n \geqslant 1)$, $(S'_n \geqslant 1)$, montrer que $l \geqslant 2l - l^2$.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}([T = -1]) = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([S_n \leqslant x]) = \dfrac{x^n}{n!}$.
3. (a) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $\mathbb{P}(T > n)$.
   (b) En déduire la loi de T.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
4. (a) Justifier la relation suivante :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \frac{1 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leqslant \alpha$$

   (b) Montrer que, pour tout réel α, $\ell \geqslant 1 - \Phi(\alpha)$ où Φ désigne la fonction de répartion de la loi normale centrée réduite.
   (c) Retrouver alors la valeur de $\mathbb{P}([T = -1])$.
5. On pose, pour tout entier naturel k non nul, $Y_k = -\ln(1 - X_k)$.
   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $V_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Enfin, pour tout réel t strictement positif, on définit l'application Z_t de Ω dans $\mathbb{R}$ par :
   Pour tout ω dans Ω, $Z_t(\omega)$ est, s'il existe, le plus petit entier naturel n non nul tel que $V_n(\omega) > t$ et, on pose $Z_t(\omega) = -1$ si un tel entier n'existe pas.
   On admet que Z_t est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que, par une démonstration analogue à celle faite précédemment, on a $\mathbb{P}([Z_t = -1]) = 0$.
   (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_k.
   (b) Quelle est la loi de la variable aléatoire V_n ?
   (c) Montrer que $Z_t - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre t.

Exercice 2

1. On considère deux variables aléatoires ***indépendantes*** X et Y, suivant chacune la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   On pose : $Z = \frac{X}{Y}$. On rappelle que la loi de Z est la *loi de CAUCHY*, de densité $\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+z^2}$.
   a. Déterminer la densité de la loi de $|Z|$.
   b. Déterminer la densité de la loi de Z^2.

On considère dans la suite du problème deux suites de variables aléatoires, $\{X_i\}$ et $\{Y_i\}$, toutes indépendantes entre elles et de même loi, admettant des moments d'ordre 2. On notera m leur espérance commune et $\sigma^2 (\neq 0)$ leur variance.

Pour tout entier naturel n, on pose : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ et : $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

Enfin, on définit la variable aléatoire : $T_n = \left|\frac{\overline{X}_n - m}{\overline{Y}_n - m}\right|$ (on suppose que cette variable est bien définie avec une probabilité égale à 1).

2. Étudier la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de la suite $\{T_n\}$.

   On rappelle que le rapport de deux suites de variables aléatoires, indépendantes entre elles et convergeant chacune en loi, converge en loi vers une loi limite qu'on peut calculer comme si les deux composantes du rapport avaient chacune une loi fixe (égale à leur propre limite).

3. On définit la variable aléatoire U_n comme suit :
   $$U_n = 1 \Leftrightarrow T_n < 1, U_n = 0 \text{ sinon.}$$
   On admet que $P\{T_n = 1\} = 0$.

   a. Calculer $\lim_{n \to +\infty} P\{U_n = 1\}$. Le résultat obtenu vous paraît-il intuitif ?
   b. En déduire la convergence en loi de la suite $\{U_n\}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

4. On pose : $Z_n = U_n\overline{X}_n + (1 - U_n)\overline{Y}_n$.

   Étudier la convergence en probabilité de la suite $\{Z_n\}$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

► On suppose dorénavant que les variables X_i et Y_i suivent toutes la même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On s'intéresse à la convergence en loi de la suite de terme général : $W_n = \sqrt{n}\,(Z_n - m)$.

5. En écrivant :
   $$W_n = \begin{cases} A_n \; si \; |A_n| < |B_n| \\ B_n \; si \; |B_n| < |A_n| \end{cases}, \text{ où : } A_n = \sqrt{n}\,(\overline{X}_n - m) \text{ et : } B_n = \sqrt{n}\,(\overline{Y}_n - m),$$
   calculer la fonction de répartition de W_n.

   On l'exprimera au moyen de la densité *h* et de la fonction de répartition *H* de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

   On remarquera que A_n et B_n sont indépendantes et jouent des rôles symétriques et on obtiendra le résultat en se ramenant au calcul de $P\{A_n < w$ et $|A_n| < |B_n|\}$, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale double évaluée grâce au théorème de FUBINI.

6. En déduire la convergence en loi de la suite $\{W_n\}$ et identifier la loi limite au moyen de sa densité.

   Obtient-on un résultat de type théorème central limite ?

■ ■ ■ ■ ■ ■