CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2021

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 8 pages, numérotées de 1 à 8.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE 1 : algèbre-analyse

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants.

Exercice 1

La 2ème partie de ce problème (questions 6.b et au-delà) s'appuie sur des résultats de la 1ère partie. La 3ème partie peut être traitée indépendamment des deux autres mais implique une mise en relation avec les résultats de la 2ème .

Dans tout le problème, on considère un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$.

1ère partie

Soient quatre vecteurs de E : a_1, a_2, b_1, b_2, tels que chacune des familles $\{a_1, a_2\}$ et $\{b_1, b_2\}$ est *libre*. On considère l'endomorphisme $f : x \in E \rightarrow f(x) = <x, a_1> b_1 + <x, a_2> b_2$.

1. Cet endomorphisme est-il injectif ?

2. On s'intéresse aux valeurs propres ***non nulles (réelles)*** de f.

   a) Montrer que le sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im} f$.

   b) Déterminer une équation du second degré que doivent vérifier les valeurs propres non nulles de f.
   On pourra raisonner en introduisant la matrice de la restriction de f *à* $\mathrm{Im} f$.

   c) Discuter du nombre de valeurs propres non nulles (réelles) et les déterminer.

   d) Déterminer, pour chacune des valeurs propres obtenues, le sous-espace propre correspondant.

3. En déduire une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de f.

   On dressera un tableau récapitulatif des différents cas de figure possibles portant sur les paramètres a_i, b_i *et* n, *en indiquant, pour chacun d'entre eux, si f est diagonalisable ou non.*

4. Appliquer aux cas particuliers suivants :

   a) $a_2 = b_1, b_2 = a_1$
   b) $a_2 = b_1, b_2 = -a_1$.

2ème partie

On rappelle qu'un endomorphisme u **de E est dit :**

- ***symétrique*** **(ou *auto-adjoint*) si et seulement si :** $\forall x, y \in E : <u(x), y> = <x, u(y)>$
- ***antisymétrique*** **si et seulement si :** $\forall x, y \in E : <u(x), y> = -<x, u(y)>$.

5.
   a) Déterminer le seul endomorphisme de E à la fois symétrique et antisymétrique.

   b) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si :

$$\forall x \in E : <u(x),\ x> = 0.$$

6. Soient a et b deux vecteurs de E *formant une famille libre*. On pose :

$$\forall\ x \in E : q(x) = <x\,,\ a> <x\,,\ b>.$$

   a) Montrer que, s'il existe un endomorphisme *symétrique* u de E tel que :

$$\forall\ x \in E : q(x) = <x\,, u(x)>, \quad \text{alors } u \text{ est unique.}$$

   b) Déterminer explicitement cet endomorphisme symétrique en fonction de a et b (*on montrera qu'il est de la forme des endomorphismes étudiés dans la 1ère partie*).

   c) En utilisant les résultats de la 1ère partie (ou en refaisant une étude directe), déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

   d) Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3ème partie

Dans cette partie, a et b sont deux vecteurs quelconques de E, seulement supposés <u>non nuls</u>.

On s'intéresse à la fonction définie par : $\forall\ x \in E - \{0\} : r(x) = \dfrac{<x,\ a> <x,\ b>}{\|x\|^2}.$

7.
   a) Montrer que : $\forall\ x \in E - \{0\} : |r(x)| \leq \|a\|\ \|b\|.$

   b) Sous quelle condition sur a et b peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?

Dans la suite, on suppose que la condition du 7.b n'est pas satisfaite et on s'intéresse aux extrema de la fonction r.

8. On suppose tout d'abord que a et b sont ***orthogonaux***. On pose : $P = Vect\{a\,,\ b\}$.

   a) Déterminer les extrema de r sur P.

      On pourra montrer que cette étude se ramène à celle des extrema d'une fonction d'une seule variable réelle.

   b) En déduire les extrema de r sur $E - \{\ 0\}$. Montrer que ces résultats sont cohérents avec ceux de la 2ème partie et qu'ils auraient pu être obtenus à partir de ces derniers.

9. Refaire la même étude qu'à la question 8 dans le cas général.

Exercice 2

Pour toute fonction f et tout entier naturel n, f^n désigne la fonction qui à x associe $(f(x))^n$.
On note E_0 l'ensemble des applications continues de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$.
On définit l'ensemble :

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ f \in E_0 \ ; \ \int_0^1 |f(x)|dx \text{ existe} \right\}.$$

Si une fonction f est dans $\mathcal{L}_1$, son intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ sera notée $I(f)$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier n et tout élément f de $\mathcal{L}_1$, l'intégrale $a_n(f) = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$ est convergente.

   (b) En déduire que, pour tout polynôme P, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(x)f(x)dx$ est convergente.

2. Soit $f \in \mathcal{L}_1$.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que : $\exists \eta \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left| \displaystyle\int_\eta^1 x^n f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon$.

   (b) Ce réel η étant ainsi choisi, montrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \left| \displaystyle\int_0^\eta x^n f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon$.

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n(f) = 0$.

3. (a) On considère α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$.
   Trouver un polynôme du second degré, P, satisfaisant aux conditions suivantes :

      i. $\forall x \in]\alpha, \beta[, \ P(x) > 1$
      ii. $\forall x \in [0, \alpha] \cup [\beta, 1], \ 0 \leqslant P(x) \leqslant 1$.

   (b) Un tel polynôme P étant choisi, que dire de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta P^n(x)dx$ et de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 P^n(x)dx$?

4. (a) Soit f un élément de $\mathcal{L}_1$. On suppose qu'il existe trois réels $\varepsilon, \alpha, \beta$, avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, tels que $\forall x \in [\alpha, \beta], \ f(x) \geqslant \varepsilon$.
   On considère un polynôme P vérifiant les conditions de la question précédente.
   Que dire de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I(fP^n)$?

   (b) Soit $f \in \mathcal{L}_1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n(f) = 0$. Montrer que $f = 0$.

5. On considère dans cette question la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = e^{-(x^{1/4})} \sin(x^{1/4}).$$

   Si h est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$, on rappelle les deux résultats suivants :

   — On définit, pour tout couple réel (a,b), l'intégrale $\displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t$ par :

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\big(h(t)\big)\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}\big(h(t)\big)\mathrm{d}t.$$

   — Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ existe.

   On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{4}}$ et, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\omega t}\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente.

   (b) Établir, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $I_n = \dfrac{n!}{\omega^{n+1}}$.

   (c) Justifier que $\mathrm{Im}(I_{4n+3}) = 0$.

   (d) En déduire, à l'aide d'un changement de variable que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

   (e) Conclusion ?

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur cet espace.
On rappelle que $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des événements aléatoires, que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable ainsi que par passage au complémentaire ; de plus, pour toute variable aléatoire X et tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I)$ appartient à $\mathcal{A}$.
On note C l'ensemble des éléments ω de Ω pour lesquels $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$.
On pose, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$B(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} [|X_n| < \varepsilon].$$

1. **Montrer que $B(\varepsilon)$ est un élément de $\mathcal{A}$.**
2. **Justifier que $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{\epsilon\in\mathbb{R}_+^*} B(\varepsilon)$.**
3. **(a) Soit ε et ε' deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon < \varepsilon'$.
Établir l'inclusion suivante :**
$$B(\varepsilon) \subset B(\varepsilon').$$
(b) Montrer que
$$C = \bigcap_{p=1}^{+\infty} B\left(\frac{1}{p}\right).$$
(c) En déduire que C est un élément de $\mathcal{A}$.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 si $\mathbb{P}(C) = 1$.

4. **On se propose dans cette question de montrer que, si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, alors elle converge en probabilité vers 0.
On suppose donc que $\mathbb{P}(C) = 1$.
On pose, pour tout entier naturel k non nul et tout $\varepsilon > 0$, $E_k(\varepsilon) = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]$.**
(a) Montrer que :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$
(b) Justifier que :
$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(E_k(\varepsilon)) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k(\varepsilon)\right).$$
(c) En déduire le résultat suivant :
$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} [|X_n| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$
(d) Conclure.
5. **Dans cette question, on considère un réel $\alpha > 0$ et on suppose que les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et que, pour tout entier naturel n non nul, X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.**
(a) Justifier que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

(b) Soient $p \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$ deux entiers naturels.
Pour tout entier naturel N supérieur à k, on pose :

$$p_N = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{N}\left[|X_n < \frac{1}{p}\right]\right).$$

Étudier, en distinguant les cas suivants, la convergence de la suite $(p_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

i. $\alpha = 1$.

ii. $\alpha < 1$.

iii. $\alpha > 1$.

(c) Pour quelles valeurs de α la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 ?

Exercice 2

Chaque partie de ce problème dépend des précédentes.

Soit N **un entier naturel non nul. On note :** $E_N = \{1, ..., N\}$.

1ère partie

On réalise une succession de tirages ***indépendants*** d'un entier naturel dans E_N. La probabilité de tirer l'entier $j \in E_N$ à chaque tirage est notée $p(j)$, appartenant à $]0, 1[$ et ***ne dépendant pas du tirage considéré***. On note $T(i)$ l'élément de E_N obtenu au *i-ième* tirage.
Ainsi : $\forall\ j \in E_N : P\{T(i) = j\} = p(j)$.

Le tirage sera dit **uniforme** dans le cas particulier où les $p(j)$ sont identiques pour tout $j \in E_N$.

<u>On prendra garde à la désignation des entiers naturels considérés et aux conventions prises pour les indices : l'indice i sera relatif au rang du tirage ; les autres lettres $j, k, ...$ seront relatives aux éléments de E_N.</u>

On suppose qu'on réalise $\boxed{n\ (n \geq 1)}$ **tirages successifs** du type ci-dessus. On notera :

- S_n l'*ensemble* des entiers de E_N tirés au cours de ces n tirages (***attention*** : il s'agit d'un ensemble, les éléments qu'il contient ne sont comptés qu'une seule fois même si un même élément de E_N a été tiré plusieurs fois)

- $\pi_{j,n} = P\{j \in S_n\}$ pour $j \in E_N$.
- $\pi_{j,k,n} = P\{j \in S_n\ et\ k \in S_n\}$ pour $j \in E_N, k \in E_N, j \neq k$.

1. Pour $j \in E_N$, on note : $D_{j,n}$ la variable aléatoire représentant le nombre de fois où j a été tiré au cours des n tirages.

   a) Déterminer la loi de $D_{j,n}$.
   b) Exprimer $\pi_{j,n}$ en fonction de $p(j)$ et de n.
   c) Si l'on fixe les $\pi_{j,n}$ à des valeurs données *ex-ante*, quelles valeurs doivent prendre les $p(j)$? Compte tenu des contraintes portant sur les $p(j)$, quelles conditions doivent alors satisfaire les $\pi_{j,n}$?

   d) ***Dans cette question seulement***, on se place dans le cas *uniforme* (défini plus haut) et où :
   $$N \to +\infty\ et\ \frac{n}{N} \to \alpha > 0.$$
   Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \pi_{j,n}\ pour\ tout\ j \in E_N$.

2. Exprimer $E(Card\, S_n)$ en fonction des $p(k), n\ et\ N$.

3. Calculer $\pi_{j,k,n}\ (j \neq k)$.

4. Pour $i_1\ et\ i_2 \in \{1, ..., n\}, i_1 \neq i_2$, calculer la probabilité $P\{T(i_1) \neq T(i_2)\}$.

2ème partie

On considère N réels $x_1, \ldots, x_N$. On note : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k$ et $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2$.

On considère les éléments $x_{T(i)}$ *pour* $i = 1, \ldots, n$. On pose : $Y_i = \frac{1}{N}\frac{x_{T(i)}}{p\,[T(i)]}$. On admettra que les $x_{T(i)}$ et les Y_i sont des variables aléatoires, d'espérance $E\ Y_i$ et de variance $V\ Y_i$.

5.
   a) Expliquer pourquoi les variables Y_i sont mutuellement indépendantes.
   b) Calculer $E\ Y_1$ et $V\ Y_1$, que l'on exprimera en fonction des x_k.
      On vérifiera que, dans le cas uniforme : $V\ Y_1 = s^2$.
   c) En déduire un estimateur sans biais de $\bar{x}$ utilisant les n variables $Y_1, \ldots, Y_n$.
   d) Calculer la variance de cet estimateur.
   e) Étudier son comportement asymptotique (convergence en probabilité et normalité asymptotique) quand $n \to +\infty$.

6.
   a) Construire un estimateur sans biais de s^2 utilisant les n variables $Y_1, \ldots, Y_n$.
      On l'exprimera sous forme sommatoire en fonction des Y_i.
   b) Donner une expression simple de cet estimateur dans le cas uniforme, en fonction de la variance empirique des Y_i.

3ème partie

On suppose dans cette partie que les x_k sont les réalisations de variables aléatoires réelles $X_1, \ldots, X_N$ indépendantes et de même loi L, d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$.
On suppose que les familles de variables aléatoires $\{T(i)\}$ et $\{X_k\}$ sont mutuellement indépendantes. On admet enfin que les entités $X_{T(i)}$ sont des variables aléatoires.

7.
   a) Montrer que les variables aléatoires $X_{T(i)}$ sont de même loi mais *non indépendantes.*
      On pourra utiliser les fonctions de répartition.
   b) En déduire un estimateur sans biais de m, noté $\hat{m}_1$, utilisant les *n* variables $X_{T(i)}$.

8.
   a) Pour $i_1 \neq i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ *et* k_1 *et* $k_2 \in E_N$, calculer
   $$E\,[X_{T(i_1)}X_{T(i_2)} \,/\, T(i_1) = k_1,\ T(i_2) = k_2].$$
   b) En déduire la valeur de $Cov\,[X_{T(i_1)}, X_{T(i_2)}]$.
   c) En déduire $V\ \hat{m}_1$. Que devient cette variance dans le cas uniforme ?

9. Pour $i = 1, \ldots, n,$ on pose : $Z_i = \dfrac{1}{N} \dfrac{X_{T(i)}}{p\,[T(i)]}$ et : $\bar{Z}_n = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i.$

   a) Montrer que $\bar{Z}_n$ est aussi un estimateur sans biais de m.

   b) Dans quel cas s'identifie-t-il à l'estimateur obtenu en 7.b ?

10. On considère enfin une succession de *B* tirages de *n* éléments de E_N selon le processus uniforme défini ci-dessus, ces tirages étant indépendants. Pour chacun de ces tirages, on construit l'estimateur $\hat{m}_1$ de m défini en 7.b. Cet estimateur sera renoté $\hat{m}_{1,b}$ où $b \in \{1, \ldots, B\}$ désigne le $b-ième$ « lot » de tirages indépendants de *n* éléments de E_N.

    On note enfin : $\hat{\hat{m}}_B = \dfrac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} \hat{m}_{1,b}.$

    a) Calculer $Cov\,(\hat{m}_{1,1}, \hat{m}_{1,2})$.

    b) Comparer l'estimateur $\hat{\hat{m}}_B$ à l'estimateur naturel de m n'utilisant que les observations des variables $X_1, \ldots, X_N$.