CONCOURS ADMINISTRATEUR EXTERNE DE L'INSEE

SESSION 2018

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Tous documents et appareils électroniques interdits.

Tournez la page S.V.P.

Partie 1 : analyse-algèbre

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Dans tout l'exercice, x désigne un réel appartenant à $]0,1[$.

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'égalité suivante :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire la formule suivante :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$$

2. On définit la fonction f par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = -\ln(1-x) - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$$

   et pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} - \int_1^{n} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$$

   (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

   (b) Établir, pour tout couple d'entiers naturel (n, N), $N > n \geqslant 1$, l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant f_n(x) - f_N(x) \leqslant \frac{x^n}{n} - \frac{x^N}{N}$$

   (c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f.

3. On définit la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n$$

   (a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente ; on note γ sa limite.

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = S_n$.

4. En utilisant, entre autre, le résultat de la question 2(c), montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \gamma$.

5. (a) Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes :

$$I = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \text{ et } J = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

   (b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \left[\ln(1-x) - \ln(-\ln x)\right]$.

   (c) En déduire le résultat suivant :

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\mathrm{d}u - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

Exercice 2

Dans tout le problème, n est un entier naturel ≥ 2.

Pour toute matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, d'éléments x_i, on pose : $\|X\| = \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max} \{|x_i|\}$ et, **pour toute matrice** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: $N(A) = \underset{X \neq 0}{Sup} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Les trois parties du problème sont indépendantes mais utilisent des notations et des méthodes de raisonnement communes.

1ère partie

1. Montrer que : $N(A) \leq \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.
2.
   a. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que : $\dfrac{\|AX_0\|}{\|X_0\|} = \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Max} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.

   b. En déduire la valeur de $N(A)$ exprimée en fonction des éléments de A.

   c. Montrer que, si A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$: $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
3.
   a. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que : $|\lambda| \leq N(A)$.

   b. Montrer que, si $\lim_{p \to +\infty} N(A^p) = 0$, alors toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

   c. Établir la réciproque de cette dernière propriété lorsque A est diagonalisable.

2ème partie

Dans cette partie, on s'intéresse à des **critères d'inversibilité de la matrice A**.

4. On suppose que A possède un vecteur propre Z (assimilé à une matrice-colonne d'éléments z_i) associé à la valeur propre 0.

   a. Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \dfrac{|z_j|}{|z_i|}$.

   b. En déduire qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

   c. Déduire de ce qui précède une condition ***suffisante*** d'inversibilité de la matrice A s'exprimant en fonction de ses éléments. Cette condition est-elle nécessaire ?

   d. En déduire également une localisation, dans le plan complexe, des points-images ayant pour affixes les valeurs propres de A.

5. On suppose satisfaite la condition du 4.c. On note : $\delta = \underset{i \in \{1,2,\dots,n\}}{Min} \left\{ |a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \right\}$.

Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $V \neq 0$, et $Y = AV$, d'éléments respectifs v_i et y_i.

a. Montrer que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $|a_{i,i}||v_i| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}||v_j| \leq |y_i|$.

b. En déduire que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $|y_i| \geq |a_{i,i}||v_i| - \|V\| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

c. Montrer que : $\exists\, i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$: $\|Y\| \geq \left(|a_{i_0,i_0}| - \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \right) \|V\|$.

d. En déduire que : $N(A^{-1}) \leq \dfrac{1}{\delta}$.

6. Généralisation de la question 4 : on suppose que :

- il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que : $|a_{k,k}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|$ et : $a_{k,k} \neq 0$.
- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$: $i \neq k \Rightarrow |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

On cherche à montrer que A est inversible. Pour cela on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, non nul, d'éléments z_i, tel que : $AZ = 0$.

a. Montrer que : $\forall i \neq k, \exists\ j \neq i : \begin{cases} a_{i,j} \neq 0 \\ |z_j| > |z_i| \end{cases}$.

b. Montrer que : $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| (|z_j| - |z_k|) \geq 0$

c. En utilisant le 6.a , montrer que : $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| (|z_j| - |z_k|) \leq 0$.

d. En déduire une contradiction et conclure.

Partie 2 : probabilités-statistiques

Cette partie est constituée de deux exercices indépendants

Exercice 1

Soient U et X deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs positives. On suppose que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et que X admet une densité f, continue sur $\mathbb{R}_+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$.

1. (a) Déterminer une densité de la variable $A = \ln X$ en fonction de f.
   (b) Déterminer une densité de $B = \ln U$.
   (c) Montrer que la variable $C = \ln(UX)$ admet une densité f_C, et on exprimera pour tout réel t, $f_C(t)$ en fonction de $\displaystyle\int_t^{+\infty} f(e^s)ds$.
2. En déduire que la variable $Y = UX$ admet une densité h que l'on donnera, sur $\mathbb{R}_+^*$, sous forme d'intégrale.
3. On suppose dans cette question que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
   (a) Déterminer une densité de Y.
   (b) Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.
   On considère la variable Z_n définie par :
$$Z_n = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$
   Déterminer une densité de Z_n.
4. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-x^2/2} \text{ si } x \geqslant 0 \\ \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   (a) Déterminer la valeur du réel α pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
   On suppose dans la suite de cette question que la densité de X est cette fonction f.
   (b) Soit S une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telle que :
$$P([S=1]) = P([S=-1]) = \frac{1}{2}.$$
   On suppose en outre que les variables U, X, S sont indépendantes.
   Déterminer la loi de la variable $T = SY$.
5. On considère un entier n supérieur ou égal à 1 et on considère dans cette question $n+1$ variables aléatoires indépendantes $T_0, \ldots, T_n$ qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 et on définit la variable X par :
$$X = \sum_{k=0}^{n} T_k.$$
   (a) Déterminer une densité de X.
   (b) Montrer qu'une densité de Y est :
$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k e^{-y}}{k!} \text{ si } y > 0 \\ \\ 0 \text{ si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Une boulangère vend du pain chaque jour.

La quantité produite de pain un jour donné est fixée de manière déterministe et vaut Q (en kilogrammes). En revanche, la demande de pain est une variable aléatoire $X > 0$ (toujours en kilogrammes). **On suppose que X suit une loi continue, de fonction de répartition F strictement croissante et s'annulant en 0, et admettant une densité continue f.**

Le **coût unitaire de fabrication** (par kilogramme) est c, le **prix de vente unitaire** est p. Il n'y a pas de coût fixe de fabrication. On suppose $\boxed{p > c > 0}$.

1ère partie

Si la demande de pain X est inférieure à l'offre Q, la boulangère ne vend que la quantité X (le pain invendu un jour donné n'est pas remis en vente le lendemain) ; si la demande est supérieure à l'offre, elle ne vend que la quantité produite Q.

Dans ces conditions, on cherche **la quantité optimale Q à produire.**

L'optimalité est à entendre au sens de la **maximisation de l'espérance du bénéfice journalier (produit total de la vente - coût total de fabrication).**

1. Écrire la formule donnant le bénéfice journalier B, en fonction des paramètres p et c, de la quantité Q et de la variable aléatoire X. On introduira en particulier la variable aléatoire indicatrice $\mathbf{1}_{X<Q}$.

2. Exprimer l'espérance de B, soit EB, au moyen des différents paramètres et, éventuellement, d'intégrales faisant intervenir les fonctions f ou F.

3. Montrer que EB possède un *maximum unique* atteint en une valeur Q^* que l'on explicitera en fonction des paramètres et de la fonction F.

2ème partie

La boulangère (qui est en même temps statisticienne) cherche à prévoir sa demande journalière. La demande (aléatoire) X_T qui va s'exprimer à une date T n'est pas connue à l'avance, mais la boulangère fait l'hypothèse que la demande ne varie pas beaucoup d'un jour à l'autre, soit :

$$X_{t+1} = X_t + U_{t+1},$$

où U_{t+1} représente une perturbation (aléatoire) représentant la variation de la demande du jour $t+1$ par rapport à celle du jour t.

On suppose que X_0 est *déterministe* (valeur fixée connue) et que les U_t sont **mutuellement indépendants entre eux, de même loi, d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 \neq 0$.**

A une date $T \geq 1$, la boulangère ne dispose malheureusement pas des demandes journalières précédentes : $X_0, X_1, ..., X_{T-1}$, information qu'elle a perdue en partie, mais ne connaît explicitement que la *moyenne de ces demandes* : $\overline{X}_{T-1} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T-1} X_t$.

4.

a. Étudier la convergence **en probabilité** de la suite $\left\{\frac{X_T}{T}\right\}$ quand $T \to +\infty$

[il s'agit bien ici de X_T *et non de* $\overline{X}_T$ *].*

b. Étudier la convergence **en loi** des suites $\left\{\frac{X_T}{\sqrt{T}}\right\}$, $\left\{\frac{X_T^2}{T}\right\}$ quand $T \to +\infty$.

Il sera utile d'exprimer toutes les variables aléatoires considérées en fonction des U_t.

5.

a. Calculer $E\overline{X}_T$ et $V\overline{X}_T$ *[il s'agit bien ici de* $\overline{X}_T$ *].*

On rappelle que : $\sum_{k=1}^{T} k^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$.

b. Peut-il y avoir convergence **dans L_2** de la suite $\{\overline{X}_T\}$ vers une constante quand $T \to +\infty$?

Pour simplifier la suite des calculs, la boulangère suppose que **les U_t suivent une même loi normale**.

6.

a. Calculer la loi de la variable aléatoire $\frac{\overline{X}_T}{\sqrt{T}}$ *[il s'agit bien ici de* $\overline{X}_T$ *].*

b. En déduire la convergence **en loi** de la suite $\{\frac{\overline{X}_T}{\sqrt{T}}\}$ quand $T \to +\infty$.

7. La boulangère sait que sa prévision optimale de la demande X_T du jour T, connaissant $\overline{X}_{T-1}$, est l'espérance conditionnelle : $\boxed{X_T^* = E(X_T / \overline{X}_{T-1})}$ (pour $T \geq 2$).

a. Calculer X_T^*.
b. Donner sa loi.
c. Calculer la variance conditionnelle $V(X_T / \overline{X}_{T-1})$.
d. Calculer $\lim_{T \to +\infty} V(\frac{X_T}{\sqrt{T}} / \overline{X}_{T-1})$.