Concours administrateur externe

L'épreuve est constituée de trois exercices indépendants

Exercice 1

1. Soit f une fonction continue, positive, décroissante sur $[a, +\infty[$, où a désigne un entier naturel. On suppose de plus que la série de terme général $f(n)$ est convergente.
   (a) Établir, pour tout entier naturel N supérieur à a l'encadrement suivant :
   $$\int_a^N f(t)dt \leqslant \sum_{k=a}^{N} f(k) \leqslant \int_a^N f(t)dt + f(a)$$
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et que l'on a :
   $$\int_a^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=a}^{+\infty} f(n) \leqslant f(a) + \int_a^{+\infty} f(t)dt$$
2. Soit x un réel appartenant à $]0, 1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul,
   $$u_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n}$$
   (a) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.
   On pose :
   $$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$
   (b) On note f la fonction définie par :
   $$f \quad \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{x^t}{1 - x^t} \end{array}$$
   Montrer que f vérifie les hypothèses de la question 1 avec $a = 1$.
   (c) Établir la relation suivante :
   $$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{1 - x^t} dt \underset{x \to 1^-}{\sim} -\frac{1}{x - 1} \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} du$$
   (d) En déduire un équivalent simple de $S(x)$ quand x est au voisinage de 1^-.
3. Soit x un réel appartenant à $]0, 1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$.
   (a) Montrer que la série de terme général $v_n(x)$ est convergente.
   On pose :
   $$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$$
   (b) On note g la fonction définie par :
   $$g \quad \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{x^t}{1 + x^t} \end{array}$$
   Montrer que g vérifie les hypothèses de la question 1 avec $a = 0$.
   (c) Montrer que :
   $$T(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1 - x}$$

Exercice 2

Notations :
Pour toute variable aléatoire X, on note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X.
Pour tout réel x on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire que $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc les inégalités suivantes :
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \text{ et } x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{1+x} \text{ si } x \in [0,1] \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) Vérifier que Y est une variable à densité.
   (c) Donner une densité de Y.
   (d) Étudier l'existence de l'espérance de Y.
5. On pose $N = \lfloor Y \rfloor$ et on admet que N est une variable aléatoire.
   (a) Déterminer $N(\Omega)$.
   (b) Calculer, pour tout entier naturel k non nul, $\mathbb{P}([N = k])$ en fonction de k.
   (c) Montrer que :
   $$\mathbb{P}([N = k]) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2 \ln 2}$$
   (d) Étudier l'existence de $\mathbb{E}(N)$.
6. On pose $Z = Y - N$.
   Donner la fonction de répartition de Z et vérifier que Z suit la même loi que X.

Partie 2

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif, et pour laquelle on a $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$. On rappelle qu'une densité de X est la fonction f_X définie :

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note F_X la fonction de répartition de X.
On pose $X_1 = \lfloor X \rfloor$, $X_2 = \lfloor 10(X - X_1) \rfloor$ et l'on admet que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires.

1. (a) Déterminer $X_1(\Omega)$.
   (b) Pour tout k de $X_1(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}([X_1 = k])$.
   (c) Déterminer $\mathbb{E}(X_1)$ en fonction de λ.
2. (a) Déterminer $X_2(\Omega)$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 9\},\ \mathbb{P}([X_2 = k]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(F\left(i + \frac{k+1}{10}\right) - F\left(i + \frac{k}{10}\right) \right)$$
   (c) En déduire la loi de X_2.
3. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

Partie 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.
On rappelle que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = pq^{k-1}$$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$Q_n = \left\lfloor \frac{X}{n} \right\rfloor$$

1. Déterminer $Q_n(\Omega)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}([Q_n = 0]) = 1 - q^{n-1}$.
3. Soit k un entier naturel non nul.
   (a) Établir que :
$$\mathbb{P}([Q_n = k]) = \sum_{i=kn}^{kn+n-1} pq^{i-1}$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([Q_n = k])$ en fonction de n et de q.
4. Calculer $\mathbb{E}(Q_n)$.
5. On pose $R_n = X - nQ_n$.
   (a) Déterminer $R_n(\Omega)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{P}([R_n = 0]) = \dfrac{pq^{n-1}}{1-q^n}$.
   (c) Donner la loi de la variable R_n.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(R_n)$.
6. Les variables Q_n et R_n sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices carrées d'ordre n.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on écrit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ où $a_{i,j}$ est le terme de A situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne.
On note I la matrice identité.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on pose :
$$N(A) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{p}|a_{i,j}|\right)$$
Par définition, on dit qu'une suite (M_k), où $M_k = (m_{i,j}(k))$, de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ lorsque k tend vers $+\infty$ si et seulement si :
$$\lim_{k\to+\infty} m_{i,j}(k) = m_{i,j}$$
On note alors $\lim\limits_{k\to+\infty} M_k = M$.

Partie 1

1. Soit (M_k) une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que la suite (M_k) converge vers la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, si et seulement si :
$$\lim_{k\to+\infty} N(M_k) = 0$$
   (b) Montrer également que si la suite (M_k) converge vers la matrice M et si M' est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors :
$$\lim_{k\to+\infty}(M_k + M') = M + M'$$
2. On considère une suite (A_k) de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une matrice B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et une matrice C de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$.
   Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty}(A_kB) = AB$ et que $\lim\limits_{k\to+\infty}(CA_k) = CA$.
3. On considère deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   Justifier les assertions suivantes :
   (a) Si $N(A) = 0$ alors $A = 0$.
   (b) $\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad N(\lambda A) = |\lambda|N(A)$.
   (c) $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.

(d) On désigne par A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et par B une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.
Établir l'inégalité suivante :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

4. On désigne par A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N(A^k) \leqslant \big(N(A)\big)^k$$

(b) En déduire que si $N(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

Partie 2

Dans toute cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

1. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (réelles ou complexes, distinctes ou non) de A.

(a) Montrer que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $|\lambda_i| < 1$.

(b) En déduire que $I - A$ est inversible.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel r non nul, on a : $I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1} = \big(I - A^r\big)\big(I - A\big)^{-1}$.

(d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{r \to +\infty} \big(I + A + A^2 + \ldots + A^{r-1}\big)$ en fonction de I et de A.

2. Soit B une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\big(X_k\big)$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par la donnée de X_0 et la relation de récurrence :

$$X_{k+1} = AX_k + B$$

Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+r} - X_k = \big(I - A^r\big)(I - A)^{-1}A^k\big(X_1 - X_0\big)$$

3. (a) Montrer que la suite (X_k) converge. On note X^* sa limite.

(b) Établir, pour tout entier naturel k l'égalité suivante :

$$X^* - X_k = (I - A)^{-1}A^k\big(X_1 - X_0\big)$$

4. Montrer que X^* est l'unique solution de l'équation $X = AX + B$.

Partie 3

On se propose d'utiliser ce qui précède pour obtenir une méthode de résolution approchée de certains systèmes d'équations linéaires.
Soit $M = (m_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$ et pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on a : $m_{i,j} \neq 0$.
On souhaite résoudre le système (S) : $MX = B$, où B est une matrice donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Pour ce faire, on considère la matrice diagonale D dont les termes diagonaux sont $m_{1,1}, m_{2,2}, \ldots, m_{n,n}$ et on pose $E = M - D$.

1. Justifier que D est inversible et montrer que le système (S) est équivalent au système $X = A'X + B'$, où $A' = -D^{-1}E$ et $B' = D^{-1}B$.

2. On suppose que $N(A') < 1$ et on définit la suite (X_k) de matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par :

$$X_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = A'X_k + B'$$

(a) Montrer que la suite (X_k) converge et que sa limite X^* est l'unique solution de (S).

(b) Montrer que $N\big((I - A')^{-1}\big) \leqslant \dfrac{1}{1 - N(A')}$.

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad N(X^* - X_k) \leqslant \frac{1}{1 - N(A')}\big(N(A')\big)^k N(B')$$

Partie 4

On se propose d'utiliser la méthode de la partie précédente, en gardant les mêmes notations, pour donner une solution approchée du système suivant :

$$\begin{cases} 400x_1 + 24x_2 - 8x_3 = 30 \\ 9x_1 + 300x_2 - 15x_3 = 60 \\ 4x_1 - 8x_2 + 400x_3 = 50 \end{cases}$$

1. Déterminer M et B puis en déduire D, E, A' et B'.
2. Calculer $N(A')$ et en déduire que la suite (X_k) converge vers une limite X^* que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. Montrer que, pour tout entier naturel k, on a : $N(X^* - X_k) \leqslant \dfrac{5}{23}(0,08)^k$.
4. (a) Déterminer X_1, X_2 et X_3.

   (b) Dire avec quelle précision X_3 est une valeur approchée de X^*.