I

SESSION 2012

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages.

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants

Problème 1

On considère deux variables aléatoires indépendantes, X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes les deux la loi de Poisson de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.
On se propose de déterminer un équivalent de la probabilité $\mathbb{P}([X = Y])$ lorsque λ est au voisinage de $+\infty$.
On rappelle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$. Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et x un réel strictement positif.

Partie 1

On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$.

1. (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs.
2. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+2} en fonction de u_n.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :
$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$
   (c) Calculer, pour tout entier naturel n, $(n+1)u_{n+1}u_n$.
   (d) En déduire la valeur de u_{2n+1}.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
5. Montrer enfin que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie 2

6. Établir, pour tout réel x, la convergence de l'intégrale $I(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
7. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leqslant \frac{1}{2}$$
   (b) Établir, pour tout réel u appartenant à $[0, \frac{1}{2}]$, les inégalités suivantes :
$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leqslant 1 + u$$
8. (a) Donner les valeurs des deux intégrales suivantes :
$$J = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ et } K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$$

(b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

(c) Établir également l'inégalité suivante : $\displaystyle\int_0^1 e^{-tx}\sqrt{t}dt \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}$.

9. (a) Montrer la relation suivante :

$$\int_{-1}^0 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}}du$$

(b) En déduire que :

$$I(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

Partie 3

10. Donner, sous forme de somme d'une série, la probabilité $\mathbb{P}([X=Y])$.

11. (a) Soit t un réel élément de $[-1,1]$ et x un réel strictement positif. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ appliquée à la fonction $u \longmapsto e^u$ entre 0 et $-tx$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt = u_k$. Donner alors la valeur, selon la parité de k, de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

(c) En déduire, pour tout réel x strictement positif, l'inégalité suivante :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leqslant 2e^x \frac{x^{2n+1}}{\pi(2n+1)!}u_{2n+1}$$

(d) Établir la relation suivante :

$$I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$$

Établir finalement le résultat suivant :

$$\mathbb{P}([X=Y]) \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}$$

Problème 2

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ sera indifféremment noté P ou $P(X)$.

On rappelle que la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.

Pour tout couple d'entiers naturels (k, n) vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dbinom{n}{k}$ désigne le coefficient du binôme défini par : $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Partie 1

1. Montrer que pour tout entier naturel k appartenant à $[\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, noté $L_{n,k}$ vérifiant :

$$L_{0,0} = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ \forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_{n,k}(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k \end{cases}$$

et que ce polynôme est donné, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$L_{n,k}(X) = (-1)^{n-k} \frac{\dbinom{n}{k}}{n!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - i)$$

2. (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (L_{n,0}, L_{n,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans cette base ?

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_{n,k} = 1$.

   (d) Établir, pour tout réel x n'appartenant pas à $[\![0, n]\!]$, la formule suivante :

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{n!(x-k)}$$

3. On note Δ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad (\Delta(P))(X) = P(X+1) - P(X)$$

L'image d'un polynôme P par Δ sera simplement notée ΔP.

   (a) Montrer que Δ est un endomorphisme.

   (b) Montrer que $(L_{0,0}, L_{1,1}, \dots, L_{n,n})$ est une base notée $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Écrire la matrice de Δ dans la base $\mathcal{B}''$.

   (d) Donner le noyau, l'image et le rang de Δ.

   (e) On pose $\Delta^0 = Id$ et pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$.
   Établir, pour tout élément de $\mathbb{R}_n[X]$ la formule suivante :

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k P)(0) L_{k,k}$$

Partie 2

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

4. Montrer que, pour tout réel t de $[0, 1]$, la série de terme général $\mathbb{P}([Z = n])t^n$ est convergente.
On note désormais G_Z la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = n])t^n = \mathbb{E}(t^Z)$$

La fonction G_Z s'appelle la fonction génératrice de Z.

5. Soit m un entier supérieur ou égal à 2.
On considère m variables aléatoires aléatoires indépendantes, $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Déterminer la fonction génératrice de la variable S_m définie par $S_m = \sum_{k=1}^{m} Z_k$.

6. (a) Montrer que la fonction G_Z admet au voisinage de 0, à droite de 0, des développements limités de tout ordre.
(b) Montrer que si deux variables aléatoires U et V, à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont telles que $G_U = G_V$, alors U et V suivent la même loi.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, où N est un entier supérieur ou égal à 2. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise.
Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant N - 1$, X_n désigne la variable aléatoire égal au rang du tirage où l'on obtient pour la première fois $n + 1$ numéros distincts.
On pose $X_0 = 1$ et on définit les variables $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ par :
$Y_0 = 1,\ Y_1 = X_1 - X_0,\ Y_2 = X_2 - X_1, \dots, Y_n = X_n - X_{n-1}$.
On admet que les variables $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

7. (a) Vérifier, pour tout entier naturel n, que Y_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre et en déduire la valeur de $\mathbb{E}(Y_n)$.
(b) Donner la fonction génératrice g_n de Y_n.

8. (a) Écrire X_n en fonction de certaines des variables Y_k et en déduire l'espérance de X_n.
(b) En déduire également, pour tout réel t de $[0, 1]$, l'expression sous forme de produit de $f_n(t)$, où f_n désigne la fonction génératrice de X_n.

9. (a) Établir, pour tout réel x supérieur ou égal à N, la formule suivante :

$$f_n\left(\frac{N}{x}\right) = \frac{N(N-1)...(N-n)}{x(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$$

(b) En utilisant la question 2.(d) de la partie 1, montrer enfin que, pour tout t de $[0, 1]$, on a :

$$f_n(t) = \binom{N-1}{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{\binom{n}{k} t}{1 - \frac{k}{N} t}$$

10. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.

11. On suppose dans cette question que les entiers N et n sont liés par la relation $N = (a + 1)n$, où a est un rationnel strictement plus grand que 1.
(a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n}$ admet une limite finie notée $\ell(a)$ dont on précisera la valeur en fonction de a.
(b) Déterminer la limite ℓ définie par $\ell = \lim\limits_{a \to +\infty} \ell(a)$.
(c) Donner un équivalent, quand a est au voisinage de $+\infty$, de $\ell(a) - \ell$.