L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants

Problème 1

On désigne par N un entier naturel non nul et on note E_N l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à N.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_N)$ la base canonique de E_N, où, pour tout k de $[\![0, N]\!]$, on a : $e_k(x) = x^k$.
Le but du problème est de construire une famille de polynômes $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$, vecteurs propres d'un endomorphisme Φ, et d'étudier les racines de ces polynômes.

Partie 1 - Étude d'un endomorphisme

On considère l'endomorphisme Φ de E_N défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(P)(x) = (x - x^2)P''(x) + (1 - 2x)P'(x)$$

1. Déterminer la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Donner les valeurs propres de Φ.
   (b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Partie 2 - Construction d'une famille de polynômes

On considère les suites de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout réel x, par $U_0(x) = 1, L_0(x) = 1$, ainsi que par les relations suivantes, valables pour tout entier naturel n :

$$U_n(x) = (x - x^2)^n, L_n(x) = \frac{1}{n!}U_n^{(n)}(x)$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est une fonction dont on précisera le degré.
4. On pose $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ell_{n,k}x^k$. Déterminer, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\ell_{n,k}$ en fonction de k et de n.
5. (a) Établir, pour tout réel x et tout entier naturel n, la relation suivante : $(x - x^2)U_n'(x) = n(1 - 2x)U_n(x)$.
   (b) En dérivant $(n+1)$ fois la relation précédente, montrer que, pour tout entier n de $[\![0, N]\!]$, L_n est vecteur propre de Φ et donner la valeur propre associée.

Partie 3 - Étude des racines de L_n

On suppose dans cette partie que n est un entier naturel non nul

6. (a) En écrivant $U_n(x) = x^n(1 - x)^n$, donner, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $U_n^{(k)}(x)$.
   (b) En déduire, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, les valeurs de $U_n^{(k)}(0)$ et de $U_n^{(k)}(1)$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 L_n(t)dt$.
   (d) Donner les valeurs de $L_n(0)$ et de $L_n(1)$.
7. Montrer que L_n admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair sur $]0, 1[$.
8. On note p le nombre de zéros d'ordre impair de L_n sur $]0, 1[$ et $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ces zéros. On pose :

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{p}(x - x_j) \text{ et } J = \int_0^1 Q(t)L_n(t)dt$$

On suppose $p < n$.
   (a) Établir, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, la formule suivante :

$$n!J = (-1)^k \int_0^1 Q^{(k)}(t)U_n^{(n-k)}(t)dt$$

   (b) Montrer que la fonction $x \longmapsto Q(x)L_n(x)$ est de signe constant sur $[0, 1]$.
   (c) En déduire que L_n possède n racines distinctes appartenant toutes à $]0, 1[$.

Problème 2

On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et identiquement distribuées.
Le but du problème est d'étudier différents temps de dépassement et d'atteinte.
Dans les deux premières parties, on suppose que les variables sont discrètes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note F leur fonction de répartition commune.
Dans les parties suivantes, on suppose que les variables X_i sont à densité et note f et F respectivement une densité et la fonction de répartition des X_i.
Les parties, bien que traitant toutes des même thèmes, sont dans une très large mesure indépendantes et les préliminaires sont utilies pour les parties 3 et 4.

Préliminaires

1. Soit x un réel de $[0,1[$.
   (a) Établir la relation suivante :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$$
   (b) En déduire l'égalité suivante :
   $$\forall x \in [0,1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$
   (c) Établir, pour tout réel x de $[0,1[$, la formule suivante :
   $$\forall x \in [0,1[, \quad x + (1-x)\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$$
2. Soit X et Y deux variables à densité indépendantes, définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont les densités, notées respectivement f_X et f_Y sont nulles sur $\mathbb{R}_-$ et continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
   On note F_X et F_Y leur fonction de répartition.
   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_Y(t)f_X(t)dt$ est convergente
   $$\textit{On admettra dans la suite que } P(Y \leqslant X) = \int_0^{+\infty} F_Y(t)f_X(t)dt$$

Partie 1 - Un temps de dépassement discret

On rappelle que l'on suppose que les variables X_k sont identiquement distribuées et que l'on note F leur fonction de répartition commune.
Pour tout entier naturel k, on pose $p_k = \mathbb{P}([X_0 = k])$ et on suppose que p_k est strictement positif.
On définit la variable aléatoire T égale au premier indice n, s'il existe, tel que $X_n > X_0$, et on pose $T = 0$ si un tel indice n'existe pas.
Autrement dit, $T = \inf\{n \geqslant 1 / X_n > X_0\}$ si cet ensemble est non vide et $T = 0$ si cet ensemble est vide.
On admet que T est bien une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Établir, pour tout entier naturel M, l'inégalité suivante :
   $$\mathbb{P}([X_1 \leqslant X_0] \cap [X_2 \leqslant X_0] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant X_0]) \leqslant F^n(M) + \sum_{k=M+1}^{+\infty} p_k$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geqslant N_0 \Longrightarrow \mathbb{P}([X_1 \leqslant X_0] \cap [X_2 \leqslant X_0] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant X_0]) \leqslant \varepsilon)$$

(c) En déduire que $\mathbb{P}([T=0])=0$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbb{P}([T>n]) = \sum_{k=0}^{+\infty} (F(k))^n p_k$

5. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et admettant une espérance.

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([Z=k]) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([Z>k]) - n\mathbb{P}([Z>n])$$

   (b) Établir la formule suivante : $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z>k])$.

6. (a) Justifier, sans calcul, l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([\sup(X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_0]) = \frac{1}{n+1}$$

   (b) Montrer que : $\sum_{k=0}^{+\infty} (F(k))^n p_k \geqslant \mathbb{P}([X_1 < X_0] \cap [X_2 < X_0] \cap \ldots \cap [X_n < X_0])$.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathbb{P}([T>n]) \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (d) La variable T admet-elle une espérance ?

Partie 2 - Un temps d'atteinte discret

Dans cette partie, on désigne par p un réel élément de $]0,1[$ et on suppose que les variables X_k suivent toutes la loi géométrique de paramètre p, ou loi du temps d'atteinte du premier succès. Pour tout entier naturel k non nul et tout entier naturel n, on a donc : $\mathbb{P}([X_n = k]) = pq^{k-1}$, avec $q = 1-p$.

On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k$.

7. Montrer que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall k \geqslant n, \quad \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} \text{ , où } \binom{m}{p} \text{ désigne le coefficient du binôme : } \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

8. On considère un entier naturel N non nul et on note T_N la valeur du plus petit entier naturel n tel que $S_n > N$. On admet que T_N est une varaible aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (a) Donner la loi de T_N.

   (b) Reconnaître la loi de $Y_N = T_N - 1$.

   (c) En déduire l'espérance et la variance de T_N.

9. On garde les mêmes notations mais on suppose que N est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendante des X_k, et qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

   La loi de N est donc donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([N=k]) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

   On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel que $S_n > N$.

   Donner la loi de la variable $Y = T - 1$.

Partie 3 - Un temps de dépassement continu

On suppose que les variables X_i sont à densité et note f et F respectivement une densité et la fonction de répartition des X_i. On suppose de plus que f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
On définit la variable aléatoire N égale au premier indice n, s'il existe tel que $X_n > X_0$, et on pose $N = 0$ si un tel indice n'existe pas.
On admet que N est bien une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On pose également, pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

10. (a) Justifier l'encadrement :

$$\mathbb{P}([N > n]) \leqslant \mathbb{P}([Z_n \leqslant X_0]) \leqslant \mathbb{P}([N > n]) + \mathbb{P}([N = 0])$$

(b) Vérifier que $[N = 0] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} [Z_n \leqslant X_0]$

(c) i. Déterminer, en fonction de F, la fonction de répartition de Z_n.

ii. En déduire, en utilisant la question 2 du préliminaire, la valeur de $\mathbb{P}([N = 0])$.

11. (a) Calculer, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{P}([N > n])$.

(b) Donner la loi de N.

(c) La variable N admet-elle une espérance ?

Partie 4 - Un temps de dépassement aléatoire

On considère dans cette partie X_N, où N est la variable aléatoire de la partie précédente et on admet que X_N est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On désigne par x un réel positif et par n un entier naturel non nul.

12. On suppose dans cette question seulement que la variable X_0 est la variable certaine égale à t, où t est un réel strictement positif, et que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, la variable X_i suit la loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout réel x positif et tout entier naturel n non nul, La probabilité de l'événement $[X_N \leqslant x] \cap [N = n]$ dépend donc de t. On note $\mathbb{P}_t([X_N \leqslant x] \cap [N = n])$ cette probabilité.

(a) Comparer les événements $[X_N \leqslant x] \cap [N = n]$ et $[X_n \leqslant x] \cap [N = n]$.

(b) Que vaut, pour $t \geqslant x$, $\mathbb{P}_t([X_N \leqslant x] \cap [N = n])$?

(c) Exprimer, pour tout réel x plus grand que t, l'événement $[X_n \leqslant x] \cap [N = n]$ en fonction des événements $[X_i \leqslant t]$ et $[t \leqslant X_n \leqslant x]$.

(d) En déduire, pour tout réel x vérifiant $t < x$, la valeur de $\mathbb{P}_t([X_N \leqslant x] \cap [N = n])$.

13. On revient au cas où toutes les variables aléatoires X_i $(i \in \mathbb{N})$, suivent la même loi et on suppose que cette loi commune est la loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que l'on note f la densité des X_i qui est donc définie par : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
On admet la formule suivante, valable pour tout réel x strictement positif et tout entier naturel n non nul :

$$\mathbb{P}([X_N \leqslant x] \cap [N = n]) = \int_0^x \mathbb{P}_t([X_N \leqslant x] \cap [N = n]) f(t) dt$$

(a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}([X_N \leqslant x] \cap [N = n]) = \frac{(1 - e^{-\lambda x})^{n+1}}{n(n+1)}$$

Pour calculer l'intégrale, on pourra remarquer que $\left(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda x}\right) = \left(e^{-\lambda t} - 1\right) + \left(1 - e^{-\lambda x}\right)$

(b) En utilisant le système complet d'événements $\{[N = n]/n \in \mathbb{N}^*\}$ et la deuxième question du préliminaire, déterminer la fonction de répartition de X_N.

(c) Vérifier que X_N est bien une variable à densité, donner une densité de X_N.