I

SESSION 2010

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages.

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

L'épreuve est constituée d'un seul problème en 5 parties.

La partie 1 permet d'établir un résultat utile pour la partie 3.

Les parties 2 et 3, dépendantes, traitent des polynômes et des nombres d'Euler.

La partie 4 étudie une variable aléatoire suivant la loi d'Euler.

La partie 5 propose d'estimer la médiane d'une loi de Cauchy.

Partie 1 - Produit de Cauchy de deux séries

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose, pour tout entier naturel n, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
On se propose de démontrer que si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, de sommes respectives U et V, alors la série de terme général w_n est convergente et sa somme est UV.

1. On suppose dans cette question que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes positifs.
   (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
   $$\sum_{k=0}^{n} w_k \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} w_k$$
   (b) En déduire que la série de terme général w_n converge et que sa somme est égale à UV.
2. On revient au cas général où les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de signe quelconque. On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes, de sommes respectives U et V.
   On pose, pour tout entier naturel n :
   $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $U'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $V'_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|$, $x_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k v_{n-k}|$, $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
   (a) Montrer, pour tout entier naturel n, que $|w_n| \leqslant x_n$ et en déduire la convergence de la série de terme général w_n.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante :
   $$|U_n V_n - W_n| \leqslant U'_n V'_n - X_n$$
   (c) En déduire que la somme de la série de terme général w_n est égale à UV.

Partie 2 - La suite (E_n) des polynômes d'Euler

Dans cette partie, on note, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application φ_n qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $\varphi_n(P)$ défini par :
$$\varphi_n(P)(X) = \frac{1}{2}\left(P(X+1) + P(X)\right)$$

1. (a) Montrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) L'automorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme noté E_n, élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$\frac{1}{2}(E_n(X+1) + E_n(X)) = \frac{X^n}{n!}$$

3. (a) Vérifier que $E_0 = 1$.
   (b) Montrer, pour tout entier naturel n non nul, que : $E_n(0) + E_n(1) = 0$.
   (c) Établir, pour tout entier naturel n non nul la relation suivante : $E'_n = E_{n-1}$.
   (d) Montrer réciproquement que les trois propriétés précédentes caractérisent la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer E_1, E_2, E_3 et E_4.
5. (a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, les valeurs de $E_{2p}(0), E_{2p}(1)$ et de $E_{2p-1}(\frac{1}{2})$.
6. Montrer que, pour tout entier naturel p, les seules racines sur $[0,1]$ de E_{2p+2} sont 0 et 1 et que la seule racine sur $[0,1]$ de E_{2p+1} est $\dfrac{1}{2}$.
7. En déduire les variations, sur $[0,1]$, des fonctions $E_{4k+1}, E_{4k+2}, E_{4k+3}$ et E_{4k+4}.
8. Établir enfin que, pour tout entier naturel k, on a : $(-1)^{k+1}E_{2k+1}(0) > 0$.

Partie 3 - La suite (e_n) des nombres d'Euler

On pose, pour tout entier naturel n, $a_n = E_n(0)$. On a donc, d'après la partie précédente, pour tout entier p supérieur ou égal à 1, $a_{2p} = 0$.

1. (a) Établir, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!}$$

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n : $|a_n| \leqslant 1$.
2. Dans cette question, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Établir, pour tout réel x et tout entier naturel k, la relation suivante :

$$\int_0^1 E_{2k+2}(t)f^{(2k+3)}(x+t)dt = a_{2k+1}\left(f^{(2k+1)}(x+1) + f^{(2k+1)}(x)\right) + \int_0^1 E_{2k}(t)f^{(2k+1)}(x+t)dt$$

   (b) En déduire l'égalité suivante, valable pour tout réel x et tout entier naturel n non nul :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1)+f(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[a_{2k+1}\left(f^{(2k+1)}(x+1) + f^{(2k+1)}(x)\right)\right] - \frac{1}{2}\int_0^1 E_{2n}(t)f^{(2n+1)}(x+t)dt$$

3. Dans cette question, on désigne par z un réel quelconque de $]-1,1[$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{zt}$.
   (a) Utiliser le résultat de la question 2(b) pour établir la relation suivante :

$$\frac{2}{1+e^z} = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$$

   (b) Montrer, pour tout réel z de $]-1,1[$, l'égalité suivante :

$$\frac{2}{1+e^z} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

4. On pose, pour tout entier naturel n, $e_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$.

   (a) En utilisant le résultat de la partie 1, montrer que, pour tout réel x et tout réel z de $]-1,1[$, on a :

$$\frac{2e^{zx}}{1+e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) z^n$$

   (b) En déduire que, pour tout réel t de $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, on a : $\dfrac{2}{e^t+e^{-t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e_n t^n$

5. (a) Établir, pour tout couple (x, y) de réels et pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} E_k(x)$$

   (b) En déduire enfin, pour tout réel t et tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e_k}{2^k (n-k)!} \left(t - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

Partie 4 - La loi d'Euler et la loi de Cauchy unilatérale

1. On considère la fonction g, définie pour tout réel x, par $g(x) = \dfrac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$.
   Montrer que g peut-être considérée comme une densité de probablité.

   Dans la suite de cette partie, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant g comme densité. On dit alors que X suit la loi d'Euler.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. (a) Montrer que X admet des moments de tous ordres.
   (b) Calculer l'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$.
4. On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   (a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
   (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
5. On considère une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$,définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la même loi que Y.
   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $M_n = \sup(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n non nul, $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Partie 5 - Estimation du paramètre d'une loi de Cauchy bilatérale

On considère deux réels a et b (avec $b > 0$) et on note $\binom{n}{k}$ le coefficient du binôme défini par : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
On dit qu'une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suit la loi de Cauchy de paramètre a et b si X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{b}{\pi(b^2 + (x-a)^2)}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a, b)$.

1. (a) Vérifier que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right) + \frac{1}{2}$$

(b) La variable X admet-elle une espérance ?

(c) Montrer que F_X réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

(d) On définit les quartiles q_1, q_2, q_3 de X par : $\forall i \in [\![1,3]\!], \quad q_i = F_X^{-1}\left(\frac{i}{4}\right)$.

Exprimer la médiane q_2 et l'intervalle interquartile $q_3 - q_1$ en fonction de a et de b.

2. On considère n variables aléatoires réelles, indépendantes, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la loi $\mathcal{C}(a,b)$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et tout ω de Ω, on réordonne les nombres $(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ dans l'ordre croissant et on note $(X_{(1)}(\omega), X_{(2)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega))$ cette liste ordonnée.

On admet que l'on obtient ainsi n variables aléatoires réelles, $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ définies elles aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(a) Montrer que, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, la fonction de répartition de $X_{(k)}$, notée F_k, est donnée par :

$$F_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F_X(x)^j (1 - F_X(x))^{n-j}$$

(b) Établir la relation suivante, valable pour tout réel x :

$$F_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^{F_X(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k} dt$$

(c) En déduire qu'une densité de $X_{(k)}$ est la fonction g_k donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; g_k(x) = k\binom{n}{k} f_X(x) \left(F_X(x)\right)^{k-1} \left(1 - F_k(x)\right)^{n-k}$$

3. Dans la suite, on considère $2n-1$ variables aléatoires indépendantes, $X_1, X_2, \ldots, X_{2n-1}$, toujours définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant toutes la même loi que X. On s'intéresse à la mediane empirique de l'échantillon, c'est-à-dire à la variable aléatoire $X_{(n)}$, issue du réarrangement croissant de $(X_1, X_2, \ldots X_{2n-1})$.

(a) Vérifier qu'une densité de $X_{(n)}$ est la fonction g_n donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = n\binom{2n-1}{n} f_X(x) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\text{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)\right)^2\right)^{n-1}$$

(b) Vérifier que, pour tout réel x on a l'égalité suivante : $g_n(2a - x) = g_n(x)$ et déduire la relation suivante, valable pour tout réel ε strictement positif :

$$\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - a| \geqslant \varepsilon\right) = 2\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} g_n(x) dx$$

(c) On rappelle la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$.

En déduire un équivalent simple de $n\binom{2n-1}{n}$ quand n est au voisinage de $+\infty$.

(d) Établir, pour tout $\varepsilon > 0$, les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - a| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2n\binom{2n-1}{n}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\text{Arctan}\left(\frac{\varepsilon}{b}\right)\right)^2\right)^{n-1} \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f_X(x) dx$$

$$\mathbb{P}\left(|X_{(n)} - a| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2n\binom{2n-1}{n}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2}\left(\text{Arctan}\left(\frac{\varepsilon}{b}\right)\right)^2\right)^{n-1}$$

(e) En déduire enfin que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_{(n)} - a| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$