I

SESSION 2009

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 4 pages. L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème 1

Dans tout le problème, n est un entier de $\mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M^0 = I$, et pour tout entier naturel k non nul, on pose : $M^k = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k \text{ fois}}$.

Un élément P de $\mathbb{R}[X]$ sera noté indifféremment P ou $P(X)$ et, si P n'est pas le polynôme nul, son degré est noté d°(P).
On rappelle le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: si A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, B n'étant pas le polynôme nul, alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes réels tels que $A = BQ + R$ avec $R = 0$ ou d°(R) <d°(B).
De plus, si R est nul, on dit que le polynôme B divise le polynôme A.

Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ s'écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors la matrice $P(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $P(M) = \sum_{k=0}^{m} a_k M^k$. Par exemple, si $P(X) = X^3 - 5X + 2$, alors $P(M) = M^3 - 5M + 2I$.
On pourra utiliser sans justification les propriétés suivantes, valables pour tout couple (λ, μ) de réels, pour tout couple (P, Q) de polynômes et pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(\lambda P + \mu Q)(M) = \lambda P(M) + \mu Q(M) \text{ et } (P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M)$$

On dit qu'un polynôme *non nul* P de $\mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $P(M) = 0$.

Partie I - Polynôme minimal d'une matrice carrée

1. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe un entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I, M, M^2, \ldots, M^p)$ soit une famille liée.
   (b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur de degré supérieur ou égal à 1.
2. L'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de M possède, en tant que partie non vide de $\mathbb{N}^*$, un plus petit élément noté d.
   Établir, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, l'existence d'un unique polynôme annulateur de M, de degré d et de coefficient dominant égal à 1.

   Ce polynôme s'appelle le polynôme minimal de la matrice M et est noté μ_M.

3. (a) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que si le polynôme μ_M divise le polynôme P, alors P est un polynôme annulateur de M.
   (b) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer réciproquement que μ_M divise tout polynôme annulateur de M.
   (c) Déduire de ce qui précède une caractérisation des polynômes annulateurs de M.
4. (a) Montrer, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, que toute racine de μ_M est valeur propre de M.
   (b) Établir que les valeurs propres de M sont exactement les racines de μ_M.
5. (a) Établir, pour toute matrice inversible R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, l'égalité suivante : $Q(R^{-1}MR) = R^{-1}Q(M)R$.
   (b) En déduire que deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.
6. (a) Quel est le polynôme minimal de la matrice nulle ?
   (b) Quel est le polynôme minimal de la matrice identité ?
   (c) Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice p, c'est-à-dire vérifiant $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Déterminer le polynôme minimal de A.
7. On considère la matrice A, élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire le polynôme minimal de A et l'ensemble des valeurs propres de la matrice A .
8. (a) Déterminer le polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré supérieur ou égal 1 et de coefficient dominant égal à 1, qui est un diviseur commum des polynômes P et Q définis par :
   $P(X) = X^3 - X^2$ et $Q(X) = X^3 + X^2 + X$.

(b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A^2 = 0$ et $A^3 + A^2 + A = 0$.
Déterminer la matrice A.

Partie 2 - Trace d'une matrice carrée

Dans cette partie, on note E un espace vectoriel réel de dimension n et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $(a_{i,j})$, on définit la trace de A par : $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. (a) Montrer que l'application qui à une matrice associe sa trace, est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer, pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation suivante : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   (c) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
   (d) En déduire que, pour tout élément f de $\mathcal{L}(E)$, on peut définir la trace de f et que l'application $f \longmapsto \operatorname{tr}(f)$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que, pour tout couple (f, g) de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.
   (b) On note N le noyau de l'application linéaire trace. Déterminer $\dim(N)$.
   (c) Montrer que $\mathcal{L}(E) = N \oplus \mathbb{R}Id_E$, où $\mathbb{R}Id_E$ désigne l'ensemble des homothéties de E.

Partie 3 - Algorithme de Fadéev

On considère dans cette partie une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres distinctes, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
On note μ_A le polynôme minimal de A et on pose : $\mu_A(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Pour tout entier naturel k on pose : $S_k = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k$ et on considère le système (S), d'inconnues les n réels $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$(S) \begin{cases} S_1 + u_1 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \quad S_k + u_1 S_{k-1} + u_2 S_{k-2} + \ldots + u_{k-2} S_2 + u_{k-1} S_1 + k u_k = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, $S_k = \operatorname{tr}(A^k)$.
2. Justifier que le système (S) admet une unique solution.
3. (a) Vérifier que $u_1 = a_{n-1}$.
   (b) Montrer que $S_2 = S_1^2 - 2a_{n-2}$, puis en déduire que $u_2 = a_{n-2}$.

   On admet dans la suite que, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, on a $u_k = a_{n-k}$.
4. On définit la suite de matrices (B_k) et la suite de réels (d_k) par :

$$\begin{cases} d_1 = -\operatorname{tr}(A) \text{ et } B_1 = A + d_1 I \\ \forall k \in [\![2, n]\!], \ d_k = -\frac{1}{k}\operatorname{tr}(B_{k-1}A) \text{ et } B_k = B_{k-1}A + d_k I \end{cases}$$

   (a) Établir, pour tout entier k élément de $[\![1, n]\!]$, la relation suivante : $B_k = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$.
   (b) Exprimer, pour tout k de $[\![2, n]\!]$, d_k en fonction de $\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^2) \ldots \operatorname{tr}(A^k)$ et de $d_1, d_2, \ldots, d_{k-1}$.
   (c) En déduire, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, que $d_k = a_{n-k}$, puis que $B_n = 0$.
   (d) Montrer que A est inversible si et seulement si $d_n \neq 0$ et exprimer dans ce cas A^{-1} en fonction de B_{n-1} et de d_n.
5. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Utiliser la méthode de cette partie pour calculer A^{-1} ainsi que le polynôme minimal de A.

Problème 2

On se propose dans ce problème d'étudier les intégrales de Wallis et d'en déduire quelques applications.
Dans tout le problème on note $\binom{n}{k}$ le coefficient du binôme défini par : $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ sinon .

Partie 1 - Intégrales de Wallis

On pose, pour tout entier naturel n, $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

1. (a) Calculer w_0 et w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
2. (a) Montrer, pour tout entier naturel n, la relation : $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité : $w_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
   (c) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $(n+1)w_{n+1}w_n$.
   (d) En déduire la valeur de w_{2n+1} en fonction de n.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+2}}{w_n}$.
4. En déduire, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$.
5. Montrer que : $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
6. En déduire la formule de Wallis : $\dbinom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$

Partie 2 - Une série utile pour la suite

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.
   (a) Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) En déduire que ces deux suites sont convergentes.
   (c) Montrer qu'elles convergent vers une même limite.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $b_n = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
   Montrer que la série de terme général b_n est convergente.
3. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$.
   (a) Expliciter, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, S_{2p} en fonction de p.
   (b) En utilisant la fin de la partie 1, montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_{2p} = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Partie 3 - Calcul d'une intégrale

Pour tout entier naturel a, on note $\lfloor a \rfloor$ la partie entière de a, c'est-à-dire l'unique entier n tel que $n \leqslant a < n+1$.
Le but de cette partie est de montrer que l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} dx$ converge et de trouver sa valeur.

Pour tout ε de $]0, 1[$, on pose : $K_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} dx$.

1. Déterminer, en fonction de ε, l'entier n tel que $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer l'égalité : $K_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^{1/n} \frac{(-1)^n}{x} dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{(-1)^k}{x} dx$.

3. En utilisant la partie 2, donner la valeur de K.

Partie 4 - La formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

1. (a) Montrer la relation : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.

   (b) En déduire l'existence d'une suite (ε_n) qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini telle que : $v_n = \dfrac{1}{12n^2} + \dfrac{\varepsilon_n}{n^2}$.

   (c) Établir que la série de terme général v_n est convergente.

   (d) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ strictement positive.

   (e) En déduire que : $n! \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{\ell}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

2. (a) En utilisant l'équivalent précédent et le résultat de la dernière question de la partie 1, montrer que : $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

   (b) En déduire l'équivalent suivant :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie 5 - Calcul de l'intégrale de Gauss

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{n} dx$.

1. Montrer la convergence de l'intégrale I.

2. (a) Montrer, pour tout réel x positif, l'encadrement suivant : $1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{1+x}$.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la double inégalité : $J_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant I_n$.

3. (a) En effectuant dans I_n le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(t)$, montrer que $I_n \leqslant \sqrt{n}w_{2n-2}$.

   (b) Montrer, à l'aide d'un autre changement de variable, l'égalité : $J_n = \sqrt{n}w_{2n+1}$.

   (c) Déduire des résultats précédents l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$