I 854

SESSION 2008

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages. L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

Problème 1 : analyse et algèbre

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
Pour toute matrice carrée M, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.
Pour toute matrice X, on note ${}^tX$ la transposée de X.

On rappelle les formules suivantes :

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$.

Préliminaire

Pour tout entier m dans $\mathbb{Z}$, on pose $\alpha = \dfrac{m}{2(n+1)}$ et $C(m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi\alpha)$

1. Montrer que si α n'est pas dans $\mathbb{Z}$ alors : si m est impair on a $C(m) = 0$ et si m est pair on a $C(m) = -1$.
2. Que vaut $C(m)$ si α est un élément de $\mathbb{Z}$?

Partie 1

1. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère la matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par son terme général $u_{p,q}$, où pour tout couple d'entiers (p,q) tel que $1 \leqslant p \leqslant n,\ 1 \leqslant q \leqslant n$, on a :
$$u_{p,q} = \sin\frac{pq\pi}{n+1}.$$
Montrer que $U^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$. En déduire que la matrice U est inversible et donner l'expression de U^{-1} en fonction de U.
2. On considère la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général a_{ij} est donné par :
pour tout couple d'entiers $(i,j), 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n,\ \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$
   (a) Déterminer $Sp(A_2)$ et $Sp(A_3)$ ainsi que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres trouvées.
   (b) On note X_q la $q^{\text{ème}}$ colonne de la matrice U. Montrer que, pour tout entier q de $[\![1,n]\!]$, le vecteur colonne X_q est vecteur propre de la matrice A_n associé à la valeur propre $2\cos\dfrac{q\pi}{n+1}$.
   (c) En déduire que A_n est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A_n = PDP^{-1}$.

Partie 2

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $t_{p,q}$ est donné par :
pour tout couple d'entiers (p,q), $1 \leqslant p \leqslant n$, $1 \leqslant q \leqslant n$, $t_{p,q} = \sin\left(\frac{p(2q-1)\pi}{2n+1}\right)$.
On considère également la matrice B_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont ceux de A_n, sauf $b_{n,n}$ qui vaut 1.

1. On note Y_q la $q^{\text{ème}}$ colonne de T. Montrer que Y_q est vecteur propre de B_n et préciser la valeur propre attachée.
2. Montrer que B_n est diagonalisable et exhiber une matrice Q inversible et une matrice diagonale Δ telles que : $B_n = Q\Delta Q^{-1}$.

Partie 3

On appelle Φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\Phi(M) = A_nM - MB_n$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ et pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, on pose $M_{i,j} = X_i\, {}^tY_j$.
   (a) Quel est le format de la matrice $M_{i,j}$?
   (b) Vérifier que $M_{i,j}$ n'est pas la matrice nulle.
   (c) Montrer que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ et tout j dans $[\![1,n]\!]$, $M_{i,j}$ est vecteur propre de Φ.
3. (a) Utiliser l'expression de U^2 pour déterminer, pour tout k et tout i de $[\![1,n]\!]$, ${}^tX_k\, X_i$.
   (b) En déduire que la famille formée des n^2 matrices $M_{i,j}$ est libre.
4. Déduire de ce qui précède que Φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Partie 4

On considère l'application u de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} - \text{cotan}(t) \text{ si } 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ u(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que u est une fonction continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que u est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Etudier les variations de u.

Partie 5

Pour tout entier k de $[\![1,n]\!]$, on considère l'application s_k définie, pour tout réel t, par : $s_k(t) = \sin(kt)$.
On note $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

1. Calculer, pour tout couple d'entiers (k,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, la valeur de $\int_0^\pi s_j(t)s_k(t)dt$.
2. Montrer que $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est une base de $\mathcal{E}$.
3. Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ dont la décomposition sur la base $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ est $f = \sum_{k=1}^{n} a_k s_k$.

   Montrer que $\int_0^\pi f^2(t)dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2$.

4. On se propose dans cette question de trouver les coordonnées d'un élément f de $\mathcal{E}$ dans la base $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

   On considère donc un élément f de $\mathcal{E}$ qui s'écrit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k s_k$.

   On pose $\theta = \frac{\pi}{n+1}$

   (a) Calculer le produit $U \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \frac{2}{n+1} \sum_{p=1}^{n} f(p\theta) \sin(kp\theta)$.

5. On se donne un n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(k\theta) = b_k$.

6. On considère le cas particulier où tous les b_k sont égaux à 1. On note alors φ_n l'unique fonction de $\mathcal{E}$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \varphi_n(k\theta) = 1$.
   On considère alors la décomposition de φ_n sur la base $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\mathcal{E}$ donnée par : $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n} s_k$.

   (a) Montrer que si k est pair, alors $\alpha_{k,n} = 0$ et, si k est impair, alors $\alpha_{k,n} = \frac{4}{k\pi} - \frac{2\theta}{\pi} u(\frac{k\theta}{2})$

   (b) Montrer que pour tout entier k impair, élément de $[\![1, n]\!]$, on a : $0 \leqslant \frac{4}{k\pi} - \alpha_{k,n} \leqslant \frac{4}{(n+1)\pi}$.

   (c) Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, déterminer $\beta_k = \lim_{n\to\infty} \alpha_{k,n}$.

   (d) Soit ψ_n la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $\psi_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k s_k$.

   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\varphi_n(t) - \psi_n(t))^2 dt = 0$.

   (e) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (1 - \psi_n(t))^2 dt$ (On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$).

   (f) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (1 - \varphi_n(t))^2 dt$

Problème 2 : probabilités

Les variables aléatoires considérées dans ce problème sont, soit des variables aléatoires discrètes, soit des variables aléatoires à densité.

On rappelle les deux définitions suivantes :

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire définie sur le même espace, alors :

- On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0, \text{ ce que l'on note : } X_n \xrightarrow{P} X$$

- On dit que la suite (X_n) converge en loi vers la variable X si et seulement si, en notant F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X, en tout point x de $\mathbb{R}$ où F est continue, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x), \text{ ce que l'on note } X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

On admet de plus le résultat suivant : si la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable X, alors elle converge en loi vers X .

Le but de ce problème est de définir de nouveaux types de convergence et d'étudier les différentes relations entre ceux-ci.

Préliminaire : les inégalités de Markov

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires et une variable aléatoire X, toutes définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Montrer que :

1. Si X admet une espérance mathématique, alors :
   $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$.
2. Si X admet un moment d'ordre 2, alors : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon^2}$.
3. Montrer, plus généralement, que si X admet un moment d'ordre p, où $p \in \mathbb{N}^*$, alors :
   $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\varepsilon^p}$.

Partie 1 : convergence en moyenne

On considère toujours une suite (X_n) de variables aléatoires et une variable aléatoire X toutes définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose dans cette partie que les variables X_n et la variable X admettent une espérance.

On dit que la suite (X_n) converge en moyenne vers la variable X si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$ et on note $X_n \xrightarrow{M} X$.

1. Montrer que, si Y est une variable aléatoire admettant une espérance, alors $|Y|$ admet une espérance et $|\mathbb{E}(Y)| \leqslant \mathbb{E}(|Y|)$.

2. En déduire que si $X_n \xrightarrow{M} X$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.

3. En utilisant la relation $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, établir que $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$. Montrer alors que si $X_n \xrightarrow{M} X$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(|X|)$.

4. Montrer, en utilisant l'une des inégalités de Markov, que si $X_n \xrightarrow{M} X$, alors la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

Partie 2 : convergence en moyenne quadratique

On considère encore et toujours une suite (X_n) de variables aléatoires et une variable aléatoire X toutes définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On suppose dans cette partie que les variables X_n et la variable X admettent un moment d'ordre 2.
On dit que la suite (X_n) converge en moyenne quadratique vers la variable X si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}((X_n - X)^2) = 0$ et on note $X_n \xrightarrow{MQ} X$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(|X - X_n|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}((X - X_n)^2)}$.
2. En déduire que si $X_n \xrightarrow{MQ} X$ alors $X_n \xrightarrow{M} X$.
3. Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$, alors $X_n \xrightarrow{MQ} \mu$.

On vient donc, entre autres choses, de montrer :

$$X_n \xrightarrow{MQ} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{M} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Partie 3 : étude d'un exemple

1. On pose, pour tout réel x de $[0,1]$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-\ln u)^n}{n!} du$.
   (a) Montrer que l'intégrale $I_n(x)$ est convergente.
   (b) Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ I_n(x) = x \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-\ln x)^k}{k!}$
2. On considère une variable aléatoire X_0 qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et on construit la suite de fonctions (f_n) définie par : f_0 est une densité de la variable X_0 et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} f_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{f_{n-1}(u)}{u} du \text{ si } x \in]0,1[\\ f_n(x) = 0 \text{ si } x \notin]0,1[\end{cases}$$

   (a) Déterminer f_1, f_2 et f_3.
   (b) Déterminer explicitement f_n.
   (c) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est une densité d'une variable aléatoire, notée X_n.
   (d) Déterminer, en fonction de I_n, la fonction de répartition F_n de X_n.
3. Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

4. (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, X_n admet un moment d'ordre k, noté $\mathbb{E}(X_n^k)$ et le calculer .

   (b) Etudier la convergence en moyenne quadratique de la suite (X_n) et vérifier que le cas particulier qui vient d'être étudié ici est bien en accord avec le résultat obtenu à la question 3 de la deuxième partie.

Partie 4 : convergence complète

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X une variable aléatoire définie sur ce même espace.

On dit que la suite (X_n) converge complètement vers la variable aléatoire X si, pour tout ε strictement positif, la série de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ converge. On note alors : $X_n \xrightarrow{C} X$.

1. (a) Justifier que $X_n \xrightarrow{C} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

   (b) La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose dans cette question que, pour tout entier naturel n non nul, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n^2}$.

   (a) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(X_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(X_n > 0)$.

   (b) Donner l'expression de $\mathbb{P}(X_n > 0)$ en fonction de n.

   (c) Donner la nature de la série de terme général $\mathbb{P}(X_n \geqslant \varepsilon)$. Que peut-on en déduire ?

3. On considère une suite de variables $(X_n)_{n\geqslant 1}$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi normale centrée réduite.

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. On admet que S_n suit la loi normale de paramètres 0 et n.

   Pour tout réel a strictement positif, on pose :

   $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{a^2}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $J(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $K(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{t}{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

   (a) i. Montrer que les intégrales $I(a)$, $J(a)$, $K(a)$ convergent, et que $I(a) \leqslant J(a) \leqslant K(a)$.

      ii. Calculer $K(a)$ et montrer que $I(a) = a e^{-\frac{a^2}{2}} - a^2 J(a)$.

      iii. En déduire que $\dfrac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} \leqslant J(a) \leqslant \dfrac{1}{a} e^{-\frac{a^2}{2}}$.

   (b) Soit ε un réel strictement positif.

      i. Vérifier que $\mathbb{P}\left(|\dfrac{S_n}{n}| \geqslant \varepsilon\right) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} J(\varepsilon\sqrt{n})$.

      ii. Montrer que $\mathbb{P}\left(|\dfrac{S_n}{n}| \geqslant \varepsilon\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{\dfrac{2}{n\pi}} e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.

      iii. En déduire que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge complètement vers la variable certaine égale à 0.