I 754

SESSION 2007

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

Problème 1

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à la matrice de leurs coordonnées dans la base canonique, si bien qu'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sera indifféremment noté x ou X, où en fait $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = 0$; le plus petit entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de M.
On dit de même qu'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est nilpotent d'indice p si $f^p = 0$, et $f^{p-1} \neq 0$ où $f^p = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$.
On note $rg(u)$ (respectivement $rg(A)$) le rang de l'endomorphisme u (respectivement le rang de la matrice A).
Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $[u, v]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit de même $[A, B] = AB - BA$.
La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant fixée, on note Φ_A l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $[A, M]$; ainsi $\Phi_A(M) = AM - MA$.
De même, l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ étant fixé, on note Φ_f l'application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, définie par : $\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ \Phi_f(g) = [f, g] = f \circ g - g \circ f$.

Préliminaire

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général (a_{ij}), on définit la trace de A, notée $\text{tr}(A)$, par :
$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (somme des éléments diagonaux de A).
Dans la suite de ce préliminaire, A et B désignent deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application qui à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.
4. u étant un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, justifier le fait que l'on peut définir le nombre $\text{tr}(u)$ et préciser de quelle façon.
5. f et g étant des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, que vaut $\text{tr}([f, g])$?

Partie 1

1. A étant une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $[A, M] = M$.
   (a) Montrer que s'il existe M telle que $[A, M] = M$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, $[A, M^k] = kM^k$.
   (b) Si $M^k \neq 0$, que réprésente M^k pour l'application Φ_A ?
   (c) En déduire que M est nilpotente d'indice p et que $p \leqslant n^2$.
   (d) On se propose de montrer qu'en fait $p \leqslant n$.
      i. Montrer qu'il existe un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ tel que la famille $(X, MX, \ldots, M^{p-1}X)$ soit une famille libre.
      ii. En déduire que $p \leqslant n$.
2. (a) Soit u un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifie $rg(u) \leqslant 1$ et $\text{tr}(u) = 0$. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent.
   (b) Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et h un endomorphisme de rang 1 tel que $h = [f, g]$.
   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h \circ f^n$ est nilpotent.

3. (a) Montrer qu'on ne peut pas trouver deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $[A, B] = I_n$ où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) On considère dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit f et d les deux endomorphismes de E tels que, pour tout polynôme R de E, on a : $f(R)(X) = XR(X)$ et $d(R)(X) = R'(X)$, où R' désigne le polynôme dérivé de R.
      i. Calculer, pour tout R de E, $[d, f](R)$. Quel est l'endomorphisme $[d, f]$?
      ii. Ce résultat est-il en contradiction avec celui de la question précédente ?

Partie 2

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, nilpotent d'indice n et on rappelle que Φ_f désigne l'application définie par : $\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_f(g) = [f, g] = f \circ g - g \circ f$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(\Phi_f)^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f^{p-k} \circ g \circ f^k$.
2. Simplifier $(\Phi_f)^{2n-1}$ et en déduire que Φ_f est nilpotent.
3. On se propose de montrer dans cette question que pour tout élément u de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, il existe un élément w de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u = u \circ w \circ u$.
   (a) Montrer l'existence de w dans le cas où u est inversible.
   (b) On suppose que $\mathrm{rg}(u) = r$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que la famille $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r))$ soit libre et telle que pour $i \geqslant r$, $u(e_i) = 0$.
   (c) Montrer qu'alors l'endomorphime w défini par : $\forall i \in [\![1, r]\!], w(u(e_i)) = e_i$ et w est nul sur un supplémentaire de $\mathrm{vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r))$, répond à la question.
4. En utilisant la question précédente, montrer que f^{n-1} appartient à l'image de l'endomorphisme $(\Phi_f)^{2n-2}$.
5. Quel est l'indice de nilpotence de Φ_f ?

Partie 3

Dans cette partie, on note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont tous nuls. On considère de plus un endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, non nul et de trace nulle.

1. On suppose que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $(x, u(x))$ est une famille liée. Montrer que u est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $u = \lambda Id$.
2. Justifier l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x, u(x))$ soit une famille libre.
3. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
4. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls.
5. Soit Δ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ où, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, tous les réels λ_i sont deux à deux distincts.

   (a) Déterminer le noyau de Φ_Δ et donner la dimension de $\mathrm{Ker}(\Phi_\Delta)$.

(b) Donner la dimension de $\mathrm{Im}(\Phi_\Delta)$.

(c) En déduire que $\mathrm{Im}(\Phi_\Delta)$ est exactement l'ensemble $\mathcal{T}$.

6. Montrer que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle, alors il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = [B, C]$.

Partie 4

On note $\mathrm{Sp}(A)$ (respectivement $\mathrm{Sp}(\Phi)$) l'ensemble des valeurs propres d'une matrice A (respectivement d'un endomorphisme Φ).

Dans cette partie, $n \geqslant 2$ et A et B sont deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On définit φ_A, ψ_B et $\xi_{A,B}$ par :
$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi_A(M) = AM$, $\psi_B(M) = MB$ et $\xi_{A,B} = \varphi_A - \psi_B$.

1. (a) Soit $\lambda \in Sp(A)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.
   Montrer que X^tX est vecteur propre de φ_A et donner la valeur propre associée.
   (b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_A)$. Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
   (c) Déduire de ce qui précède que $Sp(\varphi_A) = Sp(A)$.
   (d) i. Montrer que $Sp({}^tB) = Sp(B)$.
   ii. En déduire que $Sp(\psi_B) = Sp(B)$.
2. (a) Soit $\lambda \in Sp(A)$, X un vecteur propre associé , $\mu \in Sp(B)$ et $Y \neq 0$ un vecteur tel que ${}^tBY = \mu Y$.
   Montrer que X^tY est vecteur propre de $\xi_{A,B}$ et donner la valeur propre associée.
   (b) Soit $\beta \in Sp(\xi_{A,B})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

   i. Montrer qu'il existe un vecteur propre V de B associé à une valeur propre μ tel que $MV \neq 0$ (on se souviendra que, dans toute cette partie, la matrice B est supposée diagonalisable).
   ii. En déduire qu'il existe un scalaire λ élément de $Sp(A)$ tel que $\beta = \lambda - \mu$.

   (c) Déduire de ce qui précède que $Sp(\xi_{A,B}) = \{\lambda - \mu,\ \lambda \in Sp(A),\ \mu \in Sp(B)\}$.
   (d) Démontrer l'équivalence suivante : $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset \Leftrightarrow \xi_{A,B}$ est bijective.
3. (a) Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et V un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

   On note, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$, P la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $x_{i,j}$ et V le vecteur

   $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

   Déterminer les éléments $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ de la matrice ${}^tVP$.
   (b) En déduire que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists V_i \in \mathbb{R}^n$, tel que $\begin{cases} {}^tV_iX_j = 0 \text{ si } i \neq j \\ {}^tV_iX_i = 1 \end{cases}$.
   (c) Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de vecteurs propres de ${}^tB$.
   Montrer que la famile $(M_{i,j} = X_i{}^tY_j,)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2)}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\xi_{A,B}$ est diagonalisable.
4. On s'intéresse de nouveau à l'application Φ_A définie au début du problème.
   (a) Montrer que si A est diagonalisable, Φ_A est diagonalisable.
   (b) Dans le cas où A admet n valeurs propres distinctes, combien au maximum Φ_A admet-elle de valeurs propres distinctes ?

Problème 2

On se propose, dans ce problème, de calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

On pourra, pour certains calculs, utiliser sans les justifier, les résultats suivants (i désignant le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$*) :*

$e^{t+is} = e^t(\cos s + i \sin t)$, *et si* $(t+is)$ *est un nombre complexe non nul, alors :* $\int_a^b e^{(t+is)u} du = \frac{1}{t+is}\left[e^{(t+is)b} - e^{(t+is)a}\right]$

Si f *et* g *sont deux fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\int_a^b (f(t) + ig(t))dt = \int_a^b f(t)dt + i\int_a^b g(t)dt.$

Si t *est un réel strictement positif,* $\int_a^{+\infty} e^{(-t+is)u} du$ *est une intégrale convergente qui vaut :* $\frac{1}{t-is} e^{(-t+is)a}$.

x étant un réel strictement positif donné, on considère les fonctions f, g, h de la variable λ, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$ définies par :

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \cos u}{(x+u)^2} du,$$

$$g(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(x+u)^2} du,$$

$$h(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u} \sin u}{(x+u)} du.$$

1. (a) Montrer l'existence de l'intégrale $f(\lambda)$.

   On démontrerait de même, ce que l'on ne demande pas ici, que l'intégrale $g(\lambda)$ *est convergente*

   (b) Montrer, pour tout $\lambda > 0$, l'existence de $h(\lambda)$.

   (c) Montrer l'existence de $h(0)$, et la relation : $h(0) = \frac{1}{x} - f(0)$.

2. (a) Montrer que : $\forall \lambda \geqslant 0,\ \forall u \geqslant 0,\ |e^{-\lambda u} - 1| \leqslant \lambda u$.

   (b) En déduire que, pour tout réel A strictement positif, on a l'inégalité suivante :
   $|f(\lambda) - f(0)| \leqslant \int_0^A \frac{\lambda u}{(u+x)^2} du + 2\int_A^{+\infty} \frac{1}{(u+x)^2} du.$

   (c) Montrer que la fonction f est continue en 0.

   On montrerait de même que la fonction g *est continue en* 0.

   (d) Déduire de ce qui précède que la fonction h est continue en 0.

3. Montrer que $\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$.

4. (a) Montrer que $\forall \lambda_0 > 0,\ \forall u \geqslant 0,\ \forall \lambda > \frac{\lambda_0}{2}$:
   $|e^{-\lambda u} - e^{-\lambda_0 u} + u(\lambda - \lambda_0)e^{-\lambda_0 u}| \leqslant \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} u^2 e^{-\frac{\lambda_0 u}{2}}$

   (b) En déduire que la fonction h est dérivable en tout point $\lambda_0 > 0$ et que l'on a :
   $h'(\lambda_0) = -\int_0^{+\infty} \frac{u e^{-\lambda_0 u} \sin u}{(u+x)} du$

5. (a) Montrer que la fonction $\lambda \longrightarrow l(\lambda)$ définie par $l(\lambda) = e^{-\lambda x} h(\lambda)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) En utilisant une méthode analogue à celle de la question 4), montrer que, pour $\lambda > 0$, $l'(\lambda) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+1}$.

(c) En déduire, que pour $\lambda > 0$, $l(\lambda) = -\int_0^\lambda \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt + h(0)$.

6. (a) Montrer que l'intégrale : $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente.

(b) Montrer les deux inégalités suivantes :

i. $\forall x > 0, \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right) du\right| \leqslant x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u+x}du.$

ii. $\forall x > 0, \forall A > \frac{\pi}{2}, \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \sin u \left(\frac{1}{u+x} - \frac{1}{u}\right) du\right| \leqslant x \int_{\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{1}{u^2}du.$

(c) En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du.$

7. (a) Montrer que $h(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u+x}du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}dt$

(b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$

8. On pose , pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi x t)\frac{\sin x}{x}dx$

(a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $\phi(t)$.

(b) Montrer que ϕ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X et reconnaître la loi de X.

(*On rappelle la formule :* $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$)