I 654

SESSION 2006

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet : INSEE administrateur

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 9 pages

L'usage de la calculatrice est autorisé

Tournez la page S.V.P.

A) PROBLEME D'ALGEBRE

On désigne par $\boldsymbol{R}$ le corps des réels, par $\boldsymbol{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Le $\boldsymbol{R}$ -espace vectoriel $\boldsymbol{R}^n$ est muni de sa base canonique $B_n = (e_1, ..., e_n)$. On note M_n l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\boldsymbol{R}$. L'espace $\boldsymbol{R}^n$ est identifié à $M_{n,1}$ l'ensemble des matrices à 1 colonne et n lignes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$. La matrice identité de taille (n,n) est notée I_n. On note ${}^tB$ la matrice transposée de B.

Le produit scalaire entre deux vecteurs x et y de composantes $(x_i)_{1\le i\le n}$ et $(y_j)_{1\le j\le n}$ dans la base B_n est défini par :

$$\langle x, y\rangle = {}^txy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

On désigne par $\| \ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle , \rangle$: pour tout x dans $\boldsymbol{R}^n$, $\|x\|$ est le nombre réel positif $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

On dit que deux sous-espaces vectoriels E et F de $\boldsymbol{R}^n$ sont orthogonaux (au sens du produit scalaire) si pour tout $(x, y) \in E \times F$: $\langle x, y\rangle = 0$.

Une base $(f_1, ..., f_n)$ de $\boldsymbol{R}^n$ est dite orthonormée si pour tout i compris entre 1 et n, $\|f_i\| = 1$ et pour tous i,j compris entre 1 et n, distincts, $\langle f_i, f_j\rangle = 0$.

On dit qu'une matrice A de $\boldsymbol{R}^n$ est symétrique si elle vérifie : pour tout $(x, y) \in R^n \times R^n$:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\boldsymbol{R}^n$. On admettra que toute matrice symétrique n'admet que des valeurs propres réelles et qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

On dit qu'une matrice A de S_n est positive si elle vérifie pour tout $x \in R^n$: $\langle Ax, x\rangle \ge 0$. A toute matrice symétrique positive A on associe la fonction notée $q_A : R^n \to R$ définie par

$$q_A(x) = \langle Ax, x\rangle$$

et la fonction bilinéaire $f_A : R^n \times R^n \to R$ définie par $f_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle$. On note C_{q_A} l'ensemble

$$C_{q_A} = \{x \in R^n / q_A(x) = 0\}$$

et $Kerf_A$ l'ensemble $\{x \in R^n / \forall y \in R^n : f_A(x, y) = 0\}$.

Préliminaire.

1) Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice symétrique positive

a) Prouver que $Kerf_A = KerA$.

b) Prouver que pour tous vecteurs x et y de $\boldsymbol{R}^n$.

$$f_A(x, y)^2 \le q_A(x) q_A(y)$$

c) En déduire que $C_{q_A} = Kerf_A$.

d) Prouver l'égalité suivante :

$$\sup_{i,j}|a_{i,j}| = \sup_{i}|a_{i,i}|$$

2) Soit A une matrice symétrique de M_n vérifiant pour tous $1 \le i,j \le n$: $a_{j,j} > 0$, $a_{i,j} \le 0$ si $i \ne j$, et pour tout j compris entre 1 et n :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 0.$$

a) Prouver que A est une matrice positive.
b) Montrer que le rang de A vaut n-1.

3) Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ une matrice symétrique positive de M_n.

a) Prouver qu'il existe une matrice B de M_n telle que $A = {}^t BB$

b) Prouver qu'il existe n vecteurs $x_1,\dots,x_n$ de $\boldsymbol{R}^n$ tels que pour tous i,j : $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$.

c) Prouver que le rang de A est celui de la famille ($x_1,\dots,x_n$).

1ère partie.

On se propose de démontrer qu'il n'existe pas n+2 vecteurs $x_1,\dots,x_{n+2}$ de $\boldsymbol{R}^n$ tels que

$$i \ne j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0 \qquad (*)$$

Dans toute cette partie, on suppose qu'il existe n+2 vecteurs $x_1,\dots,x_{n+2}$ vérifiant (*).

4) On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n+2}$ dans M_{n+2} de terme général $a_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$. Prouver que A est symétrique positive.

5) Démontrer que A est de rang inférieur ou égal à n.

6) Prouver qu'il existe n+2 réels strictement positifs $a_1,\dots,a_{n+2}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+2} a_i x_i = 0$

7) Conclure.

2ème partie.

On se propose de montrer qu'il existe n+1 vecteurs $u_1,\dots,u_{n+1}$ de $\boldsymbol{R}^{n+1}$, *formant une famille de rang n*, tels que pour tout i variant entre 1 et n+1 :

$$\|u_i\| = 1 \text{ et } i \ne j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n} \qquad (**)$$

8) Soit J la matrice de M_{n+1} de terme général égal à 1. On note

$$A = \frac{n+1}{n} I_{n+1} - \frac{1}{n} J$$

Prouver que A est symétrique positive et que le rang de A est égal à n.

9) En déduire l'existence de n+1 vecteurs $u_1,\ldots,u_{n+1}$ vérifiant (**).

10) Inversement, on suppose qu'il existe n+1 vecteurs $u_1,\ldots,u_{n+1}$ de $\boldsymbol{R}^n$ tels que pour tout i variant entre 1 et n+1 : $\|u_i\|=1$ et tels qu'il existe $\alpha \neq 1$ vérifiant

$i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j \rangle = \alpha$

Déterminer la valeur de α.

B) PROBLEME D'ANALYSE

Ce problème se compose de trois parties. La 1ère partie fournit des définitions et des propriétés générales qui seront utilisées dans les deux autres parties. La 3ème partie porte sur les probabilités et s'appuie sur certains des résultats ou des notations des deux premières parties.

1ère partie : généralités sur les séries entières.

Soit $\{a_n\}$ une suite complexe. Pour z complexe, on considère la série $\sum a_n z^n$.

1. Montrer que, s'il existe z_0 tel que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, alors elle converge pour tout complexe z tel que : $|z| < |z_0|$ et que, s'il existe z_1 tel que la série $\sum a_n z_1^n$ diverge, alors elle diverge pour tout complexe z tel que : $|z| > |z_1|$.

2. On définit le réel $R = \sup\limits_{z \in C} \{|z| ; \sum a_n z^n \text{ converge}\}$.

   [R s'appelle *le rayon de convergence* de la série $\sum a_n z^n$; si cette série converge pour tout complexe z, on posera : $R = +\infty$].

   Montrer que, pour tout complexe z tel que : $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est convergente, et, pour tout complexe z tel que : $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.

3. Montrer que, si la série $\sum a_n$ est convergente, alors : $R \geq 1$.

4. Montrer que, si les termes de la suite $\{a_n\}$ ne s'annulent jamais et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ est finie, de valeur $l \neq 0$, alors : $R = \frac{1}{l}$. Que dire du cas : $l = 0$?

5. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. *On admettra que sa somme, lorsqu'elle existe, vaut e^z [défini par : $e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$, lorsque z s'écrit : z = a + i b, avec a et b réels].*

2ème partie : étude de quelques propriétés des séries entières dans certains cas particuliers.

Les différentes sous-parties de cette partie sont indépendantes.

1ère sous-partie

6. Lemme : soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b], à valeurs dans $\boldsymbol{R}$, et de classe C^n (où n est un entier naturel non nul). Démontrer la formule de TAYLOR avec reste intégral : $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$.

7. On considère dorénavant une fonction f définie sur tout $\boldsymbol{R}$, à valeurs dans $\boldsymbol{R}$ et de classe C^∞, *dont toutes les dérivées sont supposées à valeurs positives ou nulles.* Soit a un élément de $\boldsymbol{R}$.

   a. Montrer que, pour tout réel x > 0, la série $\sum \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k$ est convergente.

   b. Démontrer les inégalités suivantes, valables pour tout entier naturel n :

      i. Pour tout réel x > 0 : $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n \leq f(a+x)$.

      ii. Pour tout réel b > 0 : $\frac{f^{(n)}(a+b)}{n!} \leq \frac{f(a+2b)}{b^n}$.

      iii. Pour tout réel b > 0 et tout réel y ∈] 0, b [:
      $$\frac{f^{(n)}(a+y)}{n!} \leq \frac{f(a+2b)}{b^n}.$$

   c. En déduire que, pour tout réel y > 0 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} y^k = f(a+y)$.

   d. Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = 0$ *[on raisonnera par l'absurde].*

$2^{ème}$ sous-partie

Dans toute cette sous-partie, on supposera que les a_n sont à valeurs réelles et on se restreindra également à des valeurs de z (notées x) réelles.

8. On suppose ici que la série $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et que les termes a_n sont positifs ou nuls. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque cela a un sens.

   a. On suppose que la série $\sum a_n$ est convergente.

      i. Montrer que $\lim_{x \to 1^-} S(x)$ existe.

      ii. Montrer que : $\lim_{x \to 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

   b. On suppose réciproquement que $\lim_{x \to 1^-} S(x)$ existe et est finie, de valeur α.

   Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \alpha$.

   On pourra poser, pour tout entier naturel p et pour tout réel x : $S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$

   et : $S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ *et chercher à majorer de manière adéquate* $|S_p - \alpha|$.

$3^{ème}$ sous-partie

On revient au cas complexe. On suppose que la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R. On pose, comme précédemment, pour tout entier naturel p et pour tout complexe z : $S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$ et : $S_p(z) = \sum_{n=0}^{p} a_n z^n$.

9.

   a. Démontrer la relation : $S_p(z) = S_p z^p + (1 - z) \sum_{n=0}^{p-1} S_n z^n$, pour tout entier naturel p non nul et pour tout complexe z.

b. Montrer que, si la série $\sum S_n z^n$ converge, alors $\sum a_n z^n$ converge aussi. En déduire une relation entre R et le rayon de convergence R' de la série $\sum S_n z^n$.

c. **On suppose : R $\leq$ 1.** Soient $z \in \mathbf{C}$ et $\rho > 0$ tels que : $|z| < \rho < R$.

   i. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n > n_0$: $|a_n| < \dfrac{1}{\rho^n}$.

   ii. Démontrer que, pour tout complexe z et tout entier $n > n_0$:

$$|S_n z^n| < \left(\sum_{p=0}^{n_0} |a_p|\right) |z^n| + \frac{1}{1-\rho} \left|\frac{z}{\rho}\right|^n.$$

   iii. En déduire la convergence de la série $\sum S_n z^n$ puis l'égalité : R = R'.

d. Application. On suppose ici : R = 1, les a_n réels et la série $\sum a_n$ convergente, de somme S. On pose à nouveau : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque cela a un sens.

   i. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[: S(x) - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n$.

   ii. En déduire : $\lim_{x \to 1^-} S(x) = S$.

3ème partie : quelques propriétés des fonctions caractéristiques.

On rappelle que, si X est une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles telle que : E X = 0, alors X = 0 presque sûrement (p.s.), c'est-à-dire que : P {X $\neq$ 0} = 0.

Pour t réel et pour X variable aléatoire à valeurs réelles, on définit la variable aléatoire : $e^{itX} = \cos(tX) + i \sin(tX)$.

L'espérance de cette nouvelle variable aléatoire (dont on admet l'existence quel que soit t) sera notée : $\varphi_X(t)$ [*fonction caractéristique de X*] et est définie par :
$\varphi_X(t) = E[\cos(tX)] + i\, E[\sin(tX)]$, pour tout réel t.

Il est recommandé, toutefois, pour des simplifications d'écriture, de conserver la notation complexe : E e^{itX}.

φ_X sera donc une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$.

10. Calculer φ_X (t) dans chacun des cas suivants :

a. X suit une loi de POISSON de paramètre λ.
b. X suit une loi géométrique de paramètre p, définie par :
$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1}\, p, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*.$$
c. X est de la forme : Y - Z, où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de POISSON de paramètre λ.

11. Montrer que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, φ_X s'écrit sous la forme : S (e^{it}), où S est la somme d'une série entière. Que peut-on dire du rayon de convergence de cette série ?

12. Il est clair que, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, sa fonction caractéristique est périodique de période 2π. On se propose de montrer la réciproque de la propriété précédente : soit donc X une variable aléatoire dont la fonction caractéristique φ_X est périodique de période 2π.

a. En calculant φ_X (2π), montrer que : $E[1 - \cos(2\pi X)] = 0$.
b. En déduire que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ presque sûrement.
c. Existe-t-il des fonctions non nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques et qui ne sont des fonctions caractéristiques d'aucune variable aléatoire X à valeurs entières ?

13. **Dans toute la suite, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$,** de fonction caractéristique φ_X. On note : $p_n = P\{X = n\}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

a. Pour tout entier naturel q, calculer : $\int_0^{2\pi} \varphi_X(t) e^{-iqt}\, dt.$
b. En déduire que la connaissance de la fonction caractéristique de X équivaut à celle de sa loi.
c. Démontrer la relation : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^2 = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi_X(t)|^2\, dt$.