INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES ADMINISTRATEURS
et
CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE (Option Économie)

Mai 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Il est notamment demandé aux candidats $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses.*
En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

AVERTISSEMENT : **Il est rappelé à tous les candidats que le programme officiel de l'épreuve est le programme de Mathématiques des classes préparatoires au concours d'admission du groupe Sciences sociales (B/L) de la section des lettres de l'École normale supérieure, dites « Khagnes S ».**

Toute résolution faisant appel à des résultats ne figurant pas explicitement à ce programme sera rejetée.

La durée de l'épreuve est de 4 heures. Le candidat devra traiter les deux problèmes, qui sont indépendants.

PROBLÈME - I

1° **a)** Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{Z}$ la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{p^q}$ est-elle convergente ?

En cas de convergence, on note $Z(q)$ sa somme. On admet que $Z(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{p\,(p+1)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2}\,.$$

c) Justifier la convergence de la série $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p\,(p+1)^2}$ et calculer la valeur de sa somme S.

2° **a)** Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0. Prouver par récurrence sur n que

$$(\forall\, x \in I)\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad f(x) = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{x^p}{p!}\, f^{(p)}(0) \right) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

où $f^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de f.

b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\left| e^x - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \right| \leqslant e^x \, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \, . \tag{2}$$

c) Pour $x \in [0,1[$, on pose $g(x) = \ln(1-x)$. Calculer la dérivée p-ième de g.
Soit $x \in [0,1[$ fixé. Étudier les variations de la fonction $\theta(t) = \dfrac{x-t}{1-t}$ sur l'intervalle $[0,x]$ et en déduire que

$$\left| \ln(1-x) + \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \, . \tag{3}$$

3° Soit p et q deux entiers naturels. On désigne par $H_{p,q}$ la fonction définie, pour $x > 0$, par $H_{p,q}(x) = x^p \, (\ln x)^q$.

a) Étudier la convergence de l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 H_{p,q}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^p \, (\ln x)^q \, \mathrm{d}x \, .$$

b) Pour tout entier naturel p, calculer $I_{p,0}$.

c) Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) pour lesquels elle converge, montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ est de la forme

$$I_{p,q} = C_q \, \frac{q!}{(p+1)^{q+1}} \, ,$$

où C_q est un réel ne dépendant que de q, que l'on précisera. Vérifier que la suite $(C_q)_{q \in \mathbb{N}}$ est bornée.

4° On pose

$$G(u) = \int_0^{+\infty} t^u \, e^{-t} \, \mathrm{d}t \, .$$

a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction G (on justifiera en détail la réponse).

b) Pour $x = n \in \mathbb{N}$, exprimer $G(n)$ à l'aide d'une intégrale de la forme $I_{p,q}$ et en déduire la valeur de $G(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5° **a).** Déterminer l'ensemble Q des valeurs de $q \in \mathbb{N}$ pour lesquelles on a convergence de l'intégrale

$$J_q = \int_0^1 \frac{(\ln x)^q}{1-x} \, \mathrm{d}x \, .$$

b) Montrer que la fonction $\varphi(x) = \dfrac{x \ln x}{1-x}$ peut être prolongée en une fonction bornée sur $[0,1]$.

c) Montrer que, pour tous $q \in Q$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$J_q - \sum_{p=0}^{n} I_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^{n+1} \, (\ln x)^q}{1-x} \, \mathrm{d}x \, . \tag{4}$$

d) Pour $q \in Q$, déduire de ce qui précède une expression de J_q à l'aide de la fonction Z.
En particulier, avec la valeur de $Z(2)$ fournie à la question **1° a)**, quelle intégrale peut-on calculer ?

6° a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$J'_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1 - \ln x}\, \mathrm{d}x\,.$$

b) Peut-on exprimer cette intégrale à l'aide d'une série par une méthode analogue à celle de la question 5° ?

7° a) Soit ψ la fonction $\psi(x) = x^{-x}$. Étudier la convergence de l'intégrale

$$K = \int_0^1 \psi(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

La fonction ψ peut-elle être prolongée en une fonction bornée sur $[0,1]$?

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| K - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}\, I_{p,p} \right| \leqslant \int_0^1 \psi(x)\, \frac{(-x\, \ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\, \mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^p}\,. \tag{6}$$

8° a) Montrer que l'intégrale

$$L = \int_0^1 \ln(x)\, \ln(1-x)\, \mathrm{d}x$$

est convergente.

b) En utilisant entre autres la question **5° b**), montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left| L + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\, I_{p,1} \right| \leqslant \frac{M}{n+1}\,. \tag{7}$$

En déduire une expression de L comme la somme d'une série puis la valeur de L.

PROBLÈME - II

On étudie dans ce problème quelques aspects élémentaires de la génétique liés aux probabilités.

Dans tout le problème, on considère une population répartie entre mâles et femelles, portant chacun des chromosomes contenant eux-mêmes des gènes. Les chromosomes, et donc les gènes, vont pa paires.
On s'intéresse à une paire de gènes particuliers pouvant présenter chacun seulement deux caractères, que l'on notera A et a. L'ordre n'intervenant pas, il y a donc trois paires de *génotypes* possibles, désignées par :

$$AA\,, \qquad Aa \ \ (\text{ou } aA)\,, \qquad aa\,.$$

On suppose les sexes mâle et femelle équirépartis dans la population et les accouplements aléatoires.
Dans une filiation, chaque enfant reçoit un gène de chaque géniteur (père et mère) avec équiprobabilité, pour constituer une paire, et les transmissions de gènes sont indépendantes.

Partie A - Généralités

On note u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans la population mâle initiale comme dans la population femelle initiale (et donc aussi dans la population totale initiale). On a alors $u_0 + 2v_0 + w_0 = 1$. On pose de plus

$$p_0 = u_0 + v_0 \quad \text{et} \quad q_0 = v_0 + w_0 .$$

1° Que représentent p_0 et q_0 ?
Exprimer la proportion de gènes de type A par rapport aux gènes de type a.

2° a) Vérifier que les proportions des génotypes AA, Aa et aa à la première génération (c'est-à-dire pour la population constituée des enfants) sont respectivement :

$$u_1 = p_0^2 , \quad 2v_1 = 2p_0\, q_0 , \quad w_1 = q_0^2 . \tag{1}$$

b) Déterminer plus généralement les proportions u_n, $2v_n$, w_n des génotypes AA, Aa et aa respectivement, à la n-ième génération (c'est-à-dire après n filiations) et préciser la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

N.B. Ceci montre qu'on atteint approximativement la stabilité des génotypes dès la première génération, quelle que soit la répartition initiale.

Partie B - Sélection

Dans cette partie, on fait l'hypothèse supplémentaire que les individus de type aa ne peuvent se reproduire ; on suppose donc un accouplement aléatoire seulement parmi les individus de type AA ou Aa.
On désigne toujours par u_0, $2v_0$, w_0 respectivement les proportions des génotypes AA, Aa et aa dans les populations mâle et femelle initiales. On suppose $w_0 \neq 1$.

1° a) Quelle est la proportion de parents possibles dans la population totale initiale ?

b) Déterminer en fonction de u_0 et v_0 les proportions des génotypes AA et Aa parmi les parents.

c) On pose

$$p_0 = \frac{u_0 + v_0}{1 - w_0} \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{v_0}{1 - w_0} .$$

Montrer qu'alors les proportions des trois génotypes dans la première génération (celle des enfants) sont encore données par les formules (1).

d) Peut-on avoir $w_1 = 1$?

2° a) On désigne toujours par u_n, $2v_n$, w_n les proportions des génotypes AA, Aa et aa respectivement à la n-ième génération et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \frac{u_n + v_n}{1 - w_n} \quad \text{et} \quad q_n = \frac{v_n}{1 - w_n} . \tag{2}$$

Calculer les probabilités u_{n+1}, $2v_{n+1}$, w_{n+1} pour un enfant de la $(n+1)$-ième génération d'être de génotype AA, Aa, aa respectivement.

b) Montrer alors les relations de récurrence :

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad p_{n+1} = \frac{1}{1 + q_n} \quad \text{et} \quad q_{n+1} = \frac{q_n}{1 + q_n} . \tag{3}$$

c) En déduire q_n puis w_n en fonction de n et de q_0. (On pourra commencer par déterminer $1/q_n$, quand il est défini.)
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Interprétation ?

Partie C - Degrés de parenté

Par commodité, dans cette partie, on désigne les génotypes AA, Aa et aa par type 1, 2 et 3 respectivement et on note $J = \{1, 2, 3\}$. On note respectivement p^2, $2pq$ et q^2 les proportions des génotypes 1, 2 et 3 dans la population *femelle*, qu'on suppose constantes à chaque génération (en accord avec les observations de la partie A).

1° Pour i et j dans J, on note $p_1(i,j)$ la probabilité conditionnelle qu'un enfant soit de type j sachant que le père est de type i. Calculer les nombres $p_1(i,j)$; on présentera les réponses (justifiées) sous forme d'une matrice carrée de taille 3 :

$$A_1 = \big(p_1(i,j)\big)_{(i,j)\in J^2}\,.$$

2° Montrer que la probabilité conditionnelle $p_2(i,j)$ qu'un petit-enfant (enfant de la deuxième génération) soit de type j sachant que le grand-père paternel (père du père) est de type i est donnée par

$$p_2(i,j) = \sum_{k=1}^{3} p_1(i,k)\,p_1(k,j)\,. \tag{4}$$

En déduire la matrice $A_2 = \big(p_2(i,j)\big)_{(i,j)\in J^2}$ en fonction de A_1.

3° Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \big(p_n(i,j)\big)_{(i,j)\in J^2}$, où $p_n(i,j)$ désigne la probabilité conditionnelle qu'un enfant de la n-ième génération soit de type i sachant qu'un ancêtre mâle donné de la population initiale (par exemple le père du père etc. du père) soit de type j.

a) Déterminer les probabilités $p_{n+1}(i,j)$ en fonction des $p_n(i,j)$.

b) Montrer que

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \qquad A_n = \begin{pmatrix} p^2 + \dfrac{pq}{2^{n-1}} & 2pq + \dfrac{q\,(q-p)}{2^{n-1}} & q^2 - \dfrac{q^2}{2^{n-1}} \\ p^2 + \dfrac{p\,(q-p)}{2^n} & 2pq + \dfrac{1-4pq}{2^n} & q^2 + \dfrac{q\,(p-q)}{2^n} \\ p^2 - \dfrac{p^2}{2^{n-1}} & 2pq + \dfrac{p\,(p-q)}{2^{n-1}} & q^2 + \dfrac{pq}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

c) Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de matrices carrées de taille r fixée, de coefficients $m_n(i,j)$ (où $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant r$). On appelle limite de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la matrice dont le terme (i,j) est la limite, si elle existe, de la suite $\big(m_n(i,j)\big)$ pour n tendant vers $+\infty$.
Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

N.B. L'expression des matrices de probabilité obtenues de manière analogue entre différents parents permet de donner un sens précis à la notion de degré de parenté.