CONCOURS EXTERNE POUR LE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES ADMINISTRATEURS
et
CONCOURS D'ENTRÉE À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE (Option Économie)

AVERTISSEMENT : **Il est rappelé à tous les candidats que le programme officiel de l'épreuve est le programme de Mathématiques des classes préparatoires au concours d'admission du groupe Sciences sociales (B/L) de la section des lettres de l'Ecole normale supérieure, dites "Khagnes S".**

Toute résolution faisant appel à des résultats ne figurant pas explicitement à ce programme sera rejetée.

La durée de l'épreuve est de 4 heures. Le candidat devra traiter les deux problèmes, qui sont indépendants.

PROBLÈME I

Notations :

- *Pour deux entiers naturels p et $q \geqslant p$, on note $[\![p, q]\!] = [p, q] \cap \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels compris, au sens large, entre p et q.*

Partie A

Soit P une probabilité et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)\right) - nP(X > n). \tag{1}$$

2° On suppose que

$$\lim_{n \to \infty} \left[nP(X > n)\right] = 0$$

et que la série de terme général $u_k = P(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k). \tag{2}$$

3° Réciproquement, on suppose que X admet une espérance. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \left[nP(X > n)\right] = 0$$

et en déduire

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Partie B

On joue avec une "machine à sous" qui comporte N fenêtres ($N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$). La machine peut afficher dans chaque fenêtre, de façon indépendante et au hasard, un symbole parmi plusieurs possibles, dont un symbole appelé "joker", qui est affiché avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.

Au départ du jeu toutes les fenêtres de la machine sont vides. À la première partie, la machine affiche au hasard un symbole dans chaque fenêtre. À chaque partie suivante, la machine laisse les jokers déjà apparus et affiche au hasard un symbole dans les autres fenêtres.
On gagne si et seulement si la machine affiche un joker dans chaque fenêtre.
On désigne par S_N la variable aléatoire du nombre de parties nécessaires pour gagner.

1° a) Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i la variable aléatoire du nombre de parties nécessaires pour que la machine affiche (pour la première fois) un joker dans la fenêtre numéro i. Déterminer la loi de probabilité de X_i.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la probabilité de gagner en au plus n parties est $(1-q^n)^N$.

c) Si le nombre de parties n'est pas limité, est-on sûr de gagner ?

2° Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

et en déduire que, pour $N \to +\infty$,

$$\sigma_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln N .$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 - (1 - q^x)^N .$$

3° a) Etudier brièvement f sur $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to +\infty$.
En déduire la nature de la série de terme général $f(k)$, $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa valeur.

4° a) Justifier que S_N admet une espérance, notée $E(S_N)$, et montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant E(S_N) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x .$$

On pourra utiliser la partie A.

b) En déduire que, pour $N \to +\infty$,

$$E(S_N) \sim -\frac{\ln N}{\ln q} .$$

c) Dans cette question, on suppose qu'il y a autant de symboles différents que de fenêtres et que dans chaque fenêtre, chaque symbole a la même probabilité d'apparition.
Quelle est la limite de $E(S_N)$ pour $N \to +\infty$ dans ce cas ?

PROBLÈME II

Rappels et Notations :

- *Pour toute matrice* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, *on désigne par* ${}^tA$ *la matrice de* $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *dont le terme d'indice* (i,j) *vaut* a_{ji}.
- *Deux matrices* A *et* A' *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *sont dites* semblables *si et seulement si il existe une matrice inversible* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A' = P^{-1}AP$.
- *On rappelle le* théorème du rang *:*

  Soit E *et* F *deux espaces vectoriels de dimension finie et* $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$. *Alors on a :*

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

- *On dit que la somme de deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *d'un espace vectoriel* E *est* directe *lorsque* $F \cap G = \{0\}$ *et on note alors* $F \oplus G$ *le sous-espace somme* $F + G$.
- *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^k$ *est rapporté à sa base canonique, notée* $\mathcal{B}_k$.
- *On rappelle qu'à un vecteur* $x \in \mathbb{R}^k$ *de coordonnées* $(x_1, \dots, x_k)$ *dans la base* $\mathcal{B}_k$ *on associe la matrice colonne* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$.
- *À deux vecteurs* x *et* y *de* $\mathbb{R}^k$ *de coordonnées respectives* $(x_1, \dots, x_k)$ *et* $(y_1, \dots, y_k)$, *on associe le réel*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i .$$

Partie A

1° a) Vérifier que si X et Y sont les matrices colonne associées aux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^k$

$${}^tXY = (x \mid y) = (y \mid x) = {}^tYX .$$

Que dire d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $(x \mid x) = 0$?

b) Montrer que pour tous vecteurs x, x', y de $\mathbb{R}^k$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\big((x + \lambda x') \mid y\big) = (x \mid y) + \lambda (x' \mid y).$$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$. On considère l'ensemble, noté $F^\perp$, défini par

$$F^\perp = \big\{x \in \mathbb{R}^k \;/\; (\forall y \in F) \quad (x \mid y) = 0\big\}.$$

2° a) Vérifier que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^k$.

b) Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

3° a) Soit p la dimension du sous-espace vectoriel $F \oplus F^\perp$ et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de $F \oplus F^\perp$. On considère l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longrightarrow & \big((x \mid f_1), \dots, (x \mid f_p)\big). \end{array}$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}\Phi$. Montrer que $x \in F^\perp$. En déduire que $x = 0$ (on pourra calculer $(x \mid x)$).

b) En déduire que $\mathbb{R}^k = F \oplus F^\perp$.

c) Montrer que $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Partie B

Dans toute la suite du problème, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice associée dans $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$ à une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
On note ${}^t u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'application linéaire de matrice ${}^t A$ dans les bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$.
Soit $\widehat{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$A\widehat{A}A = A. \tag{3}$$

On désignera par $\widehat{u}$ l'application linéaire associée à $\widehat{A}$ dans $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_p$.

1° Prouver que si $n = p$ et si $\operatorname{rg} A = n$ alors il n'existe qu'une seule matrice $\widehat{A}$ vérifiant (3).

2° On suppose que $n = p$ et que A est semblable à une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où M est une matrice carrée de taille r inversible.
Déterminer une matrice $\widehat{A}$ vérifiant (3). Montrer que cette matrice n'est en général pas unique.

3° Dans cette question, on considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = {}^t A A.$$

a) Montrer que B admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B, associés aux valeurs propres rangées par ordre décroissant ; on imposera à la matrice de passage P d'avoir tous ses termes diagonaux égaux à 1.

b) Trouver une matrice $\widehat{B}$ vérifiant l'égalité $B\widehat{B}B = B$.

On revient au cas général.

4° Prouver que

$$\operatorname{Ker}({}^t u) = (\operatorname{Im} u)^{\perp}.$$

On pourra utiliser l'écriture matricielle $(x \mid y) = {}^t X Y$.

5° Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = {}^t A A$ et $\widehat{B}$ une matrice vérifiant $B\widehat{B}B = B$.
On introduit l'endomorphisme $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ de matrice $\widehat{B}$ dans la base $\mathcal{B}_p$ et l'on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $w = u \circ v \circ {}^t u$.

a) Prouver que si $x \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ on a $w(x) = 0$.

b) Soit $y = u(x)$ un vecteur quelconque de $\operatorname{Im} u$. Prouver que $w(y) - y \in \operatorname{Ker}({}^t u)$.

c) En déduire, à l'aide de la question **B.4°**), que $y \in \operatorname{Im} u \Rightarrow w(y) = y$.

On a donc prouvé que si $x = \alpha + \beta$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec $\alpha \in \operatorname{Im} u$ et $\beta \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$, on a $w(x) = \alpha$.

Partie C

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$; on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs x tels que $y_0 - u(x) \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.

1° Dans le cas particulier où $y_0 = u(x_0) \in \operatorname{Im} u$, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ correspondant à l'aide de x_0 et u.

2° Dans le cas général, en considérant $w(y_0)$ (où w a été défini à la question **B.5°**)), déterminer un vecteur x_0 particulier appartenant à $\mathcal{S}$ et préciser les éléments de $\mathcal{S}$ en fonction de x_0.

3° Dans cette question, on considère le vecteur $y_0 \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0, 0, 1)$ et l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie à la question **B.3°**). Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ correspondant.